

В. В. Шлыков

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 10 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

*Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь*

3-е издание, пересмотренное и исправленное

Минск «Народная асвета» 2013

Правообладатель Народная асвета

УДК 514(075.3=161.1)

ББК 22.151я721

Ш69

Рецензенты:

кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета (кандидат физико-математических наук доцент *Ю. Д. Чурбанов*); методист высшей категории отдела общеобразовательных дисциплин государственного учреждения дополнительного образования взрослых «Витебский областной институт развития образования» *Т. Т. Талькова*; учитель математики высшей категории государственного учреждения образования «Миорская средняя школа № 1» *И. А. Ханецкая*

Шлыков, В. В.

Ш69 Геометрия : учеб. пособие для 10-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / В. В. Шлыков. — 3-е изд., пересмотр. и испр. — Минск : Нар. света, 2013. — 160 с. : ил.

ISBN 978-985-12-2167-3.

Предыдущее издание вышло в 2008 г. под названием «Геометрия, 11».

УДК 514(075.3=161.1)

ББК 22.151я721

ISBN 978-985-12-2167-3

© Шлыков В. В., 2007

© Шлыков В. В., 2013, с изменениями

© Оформление. УП «Народная асвета», 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1

Введение в стереометрию

§ 1. Многогранники и их изображения	6
§ 2. Аксиомы стереометрии	21
§ 3. Следствия из аксиом	34
§ 4. Построение сечений многогранников плоскостью	40

Глава 2

Параллельность прямых и плоскостей

§ 1. Параллельные прямые в пространстве	54
§ 2. Параллельность прямой и плоскости	65
§ 3. Скрещивающиеся прямые	76
§ 4. Угол между прямыми	85
§ 5. Параллельность плоскостей	93

Глава 3

Перпендикулярность прямой и плоскости.

Перпендикулярность плоскостей

§ 1. Перпендикулярность прямой и плоскости	108
§ 2. Перпендикуляр и наклонная. Расстояние от точки до плоскости	123
§ 3. Угол между прямой и плоскостью	133
§ 4. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей	138
Приложение	150
Ответы	157

Уважаемые друзья!

Цель данного учебного пособия — помочь изучить раздел геометрии, который называется стереометрией. В предыдущих классах вы в основном изучали свойства плоских фигур, а теперь приступаете к изучению пространственных фигур. В процессе изучения стереометрии вы будете совершенствовать навыки логического мышления, развивать пространственные представления, умения мысленно моделировать новые геометрические фигуры и строить их графические изображения.

Постигая стереометрию, вы будете знакомиться с новыми геометрическими понятиями и закономерностями, многие из которых на протяжении столетий применяются в производственной деятельности, используются в архитектуре и живописи. Полученные знания помогут вам понять, почему геометрические свойства вызывают неизменный интерес у художников и архитекторов. Например, теоретик искусства Раннего Возрождения итальянский ученый Леон Баттиста Альберти (1404—1472) подчеркивал значение геометрии в живописи, а французский архитектор XX столетия Ле Корбюзье (1887—1965) отмечал, что окружающий нас мир является миром геометрии и что своими художественными впечатлениями человек обязан именно геометрии. Произведения художников эпохи Возрождения Леонардо да Винчи (1452—1519) и Альбрехта Дюрера (1471—1528), величественные сооружения архитекторов древности и современников убедительно свидетельствуют о том, что геометрия была и остается определяющей в вопросах гармонии и красоты.

Для успешного изучения стереометрии по ходу изложения теоретического материала приведены решения задач, которые помогут вам закрепить теоретические знания, выработать навыки применения этих знаний на практике, предоставят возможность для получения консультаций по методам решения стереометрических задач. Пусть изучение стереометрии доставит вам удовольствие и убедит в правоте выдающегося французского математика и философа Блеза Паскаля (1623—1662), который считал, что «того, кто владеет геометрией, эта наука продвигает настолько далеко, что он оказывается вооруженным совершенно новой силой».

ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ



Глава I

ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ

§ 1. Многогранники и их изображения

1. Пространственные фигуры и их изображения. В предыдущих классах мы в основном изучали *планиметрию* — геометрию на плоскости. Теперь, зная свойства плоских геометрических фигур, приступаем к изучению *стереометрии* (греч. *стереос* — пространственный) — раздела геометрии, в котором исследуются свойства не только плоских, но и пространственных геометрических фигур, т. е. таких, не все точки которых лежат в одной плоскости: например, параллелепипед и пирамида (рис. 1, а); шар и цилиндр (рис. 1, б).

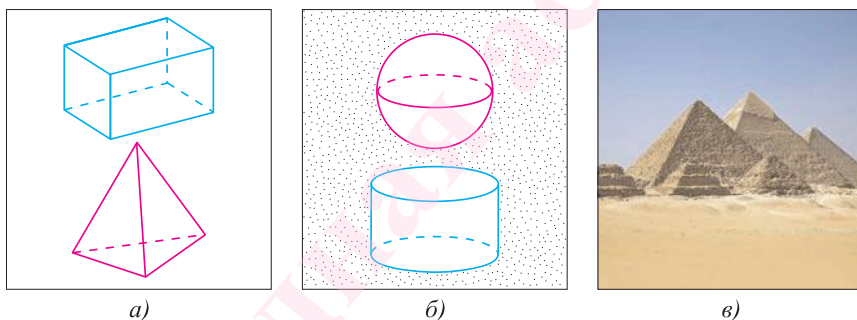


Рис. 1

Представление о пространственных геометрических фигурах дают окружающие нас предметы, если принимать во внимание только их форму и размеры, не интересуясь всеми остальными свойствами: цветом, массой и т. д. Например, апельсин, капля воды в невесомости дают представление о шаре; спичечный коробок и многие жилые дома имеют форму параллелепипеда; усыпальницы египетских фараонов построены в форме пирамиды (рис. 1, в).

Точки и прямые были основными фигурами в планиметрии. Наряду с ними в стереометрии в качестве основных рассматриваются и плоскости. Представление о части плоскости дает поверхность оконного стекла, гладкая поверхность письменного стола или мраморной плитки.

В стереометрии, как и в планиметрии, используются общематематические понятия «принадлежать» или «лежать на», «множество», «число» и т. д.

В пространстве имеется бесконечно много плоскостей, и на каждой из них справедливы аксиомы планиметрии и следствия из них. Поэтому в дальнейшем, рассматривая фигуры, лежащие в какой-либо плоскости, будем пользоваться всеми свойствами этих фигур и теоремами, доказанными в планиметрии. Кроме того, отметим, что *признаки равенства и подобия треугольников, изученные в планиметрии, справедливы и для треугольников, лежащих в разных плоскостях.*

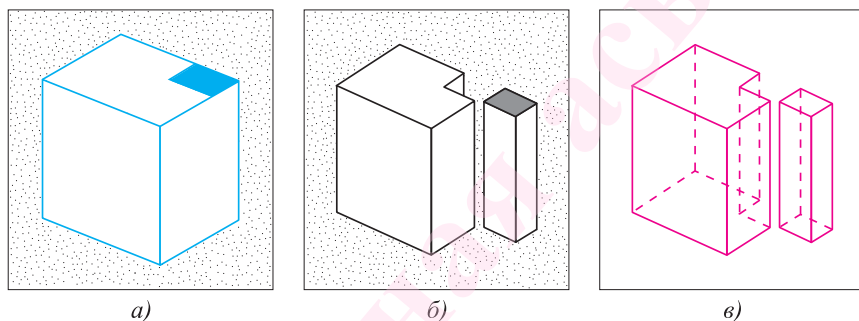


Рис. 2

В стереометрии большую роль играют пространственные представления, развитию которых способствуют различные изображения фигур. Доказательства теорем стереометрии и решения задач сопровождаются изображениями плоских и пространственных фигур на плоскости рисунка (в тетради или на доске). За изображение фигуры принимается фигура, подобная ее проекции на некоторую плоскость, и выбирается такое изображение, которое дает верное представление о форме фигуры, является удобным для изучения ее свойств. При этом некоторые невидимые части фигуры для большей наглядности изображаются штриховой линией (рис. 2, а, б, в).

Перечислим простейшие правила построения изображений фигур.

1) За изображение отрезка принимается отрезок. Середина отрезка изображается серединой его изображения;

точка, делящая отрезок в отношении $m : n$, изображается точкой, делящей его изображение в отношении $m : n$.

2) Параллельные прямые (отрезки) изображаются параллельными прямыми (отрезками).

3) В качестве изображения любого треугольника можно принять произвольный треугольник.

Из правил 2 и 3 следует, что за изображение квадрата, прямоугольника, ромба, параллелограмма можно принять произвольный параллелограмм. В дальнейшем будем этим пользоваться, выполняя изображения фигур.

2. Многогранники. Ранее уже отмечалось, что одним из объектов изучения стереометрии являются пространственные фигуры, к которым относятся и многогранники. Дадим описание многогранников.

Многогранник представляет собой геометрическое тело, ограниченное конечным числом плоских многоугольников, любые два из которых, имеющие общую сторону, не лежат в одной плоскости; сами многоугольники называются *гранями*, их стороны — *ребрами многогранника*, а их вершины — *вершинами многогранника*.

Понятие геометрического тела и определение многогранника будут даны позже, а сейчас отметим, что наглядное представление о геометрическом теле дает часть пространства, которую занимает какое-либо физическое тело.

Фигура, образованная всеми гранями многогранника, называется его *поверхностью (полной поверхностью)*, а сумма площадей всех его граней — *площадью (полной) поверхности*.

Представление о многогранниках дают кристаллы различных минералов, встречающихся в природе. Например, бриллиант представляет собой алмаз, ограненный должным образом, т. е. имеющий форму определенного многогранника. Другими примерами моделей многогранников с достаточной точностью служат книжные полки, шкафы, строящиеся дома и т. д. Как видим, в окружающем нас пространстве есть множество разнообразных предметов, имеющих форму многогранников.

На рисунках 3, а, б, в и 4, а даны изображения некоторых многогранников.

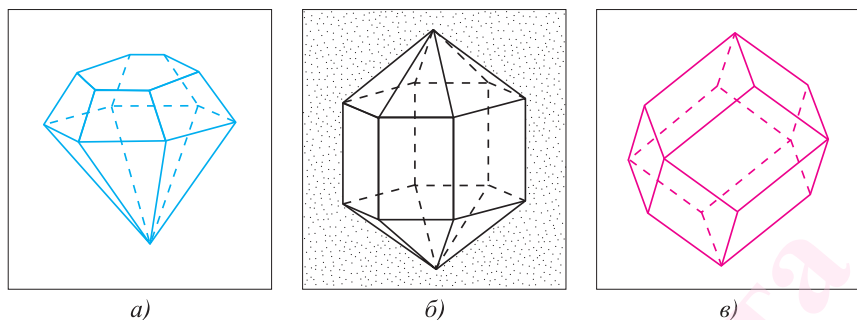


Рис. 3

А вот многоугольники, изображенные на рисунке 4, б, в, не ограничивают части пространства, а следовательно, не образуют поверхность одного многогранника.

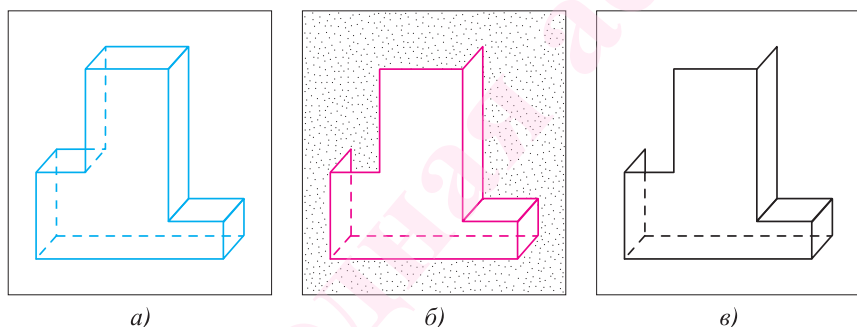


Рис. 4

Многогранник называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани. Если это условие не выполняется, то многогранник называется *невыпуклым*. Выпуклые многогранники изображены на рисунках 3, а, б, в. Многогранник, изображенный на рисунке 4, а, невыпуклый.

Дадим описание некоторых выпуклых многогранников.

3. Куб, параллелепипед. *Куб* — это многогранник, имеющий *шесть граней*, которые являются *равными квадратами*. Стороны квадратов называются *ребрами* куба, а вершины — *вершинами* куба. На рисунке 5, а, б даны изображения куба. Изображение на рисунке 5, а является более наглядным.

Заметим, что шесть равных квадратов в пространстве могут быть расположены так, что они не будут гранями одного куба, например, как показано на рисунке 5, в.

Параллелепипед — это многогранник, у которого *шесть граней и каждая из них — параллелограмм*.

Стороны параллелограммов называются *ребрами* параллелепипеда, а их вершины — *вершинами* параллелепипеда. Две грани параллелепипеда называются *противолежащими*, если они не имеют общего ребра, а имеющие общее ребро называются *смежными*.

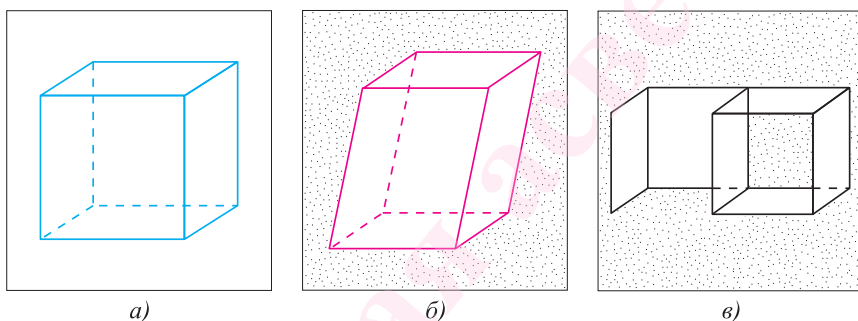


Рис. 5

Иногда какие-нибудь две противоположные грани параллелепипеда выделяются и называются *основаниями*, тогда остальные грани — *боковыми* гранями, а их стороны, соединяющие вершины оснований параллелепипеда, — его *боковыми* ребрами.

Прямой параллелепипед — это такой параллелепипед, у которого *боковые* грани — прямоугольники.

Прямоугольный параллелепипед — это параллелепипед, у которого *все* грани — *прямоугольники*. Представление о форме прямоугольного параллелепипеда дают спичечный коробок, строительный кирпич или каждая из моделей, которые получаются при распиливании на две части модели куба, сделанной из дерева, как показано на рисунке 6, а.

Заметим, что всякий прямоугольный параллелепипед является прямым параллелепипедом, *но не любой прямой параллелепипед есть прямоугольный*. Основанием прямого параллелепипеда может служить параллелограмм, не являющийся прямоугольником. Представление о прямом, но не

прямоугольном параллелепипеде дает, например, комната, в которой пол и потолок имеют форму ромба, не являющегося квадратом.

Изображения параллелепипеда даны на рисунке 6, б, в.

Если основаниями параллелепипеда служат параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, то он обозначается $ABCD A_1B_1C_1D_1$. При этом на рисунке вершины параллелепипеда обозначены так, что отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 являются его боковыми ребрами (рис. 6, в).

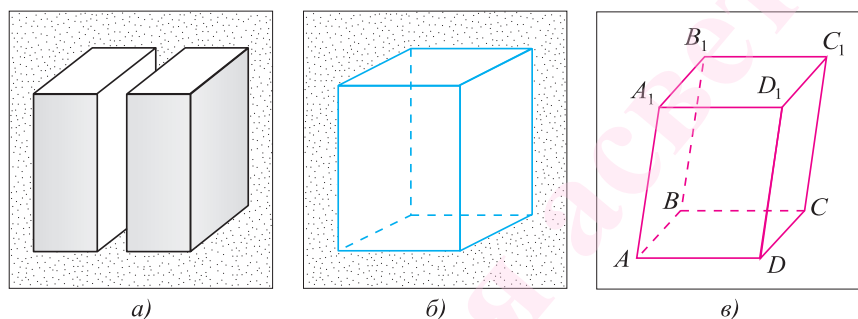


Рис. 6

Две вершины параллелепипеда, не принадлежащие одной грани, называются *противолежащими*. На рисунке 7, а отмечены противолежащие вершины O и F параллелепипеда.

Отрезок, соединяющий противолежащие вершины параллелепипеда, называется *диагональю параллелепипеда*. У параллелепипеда всего четыре диагонали. На рисунках 7, б изображены две диагонали параллелепипеда.

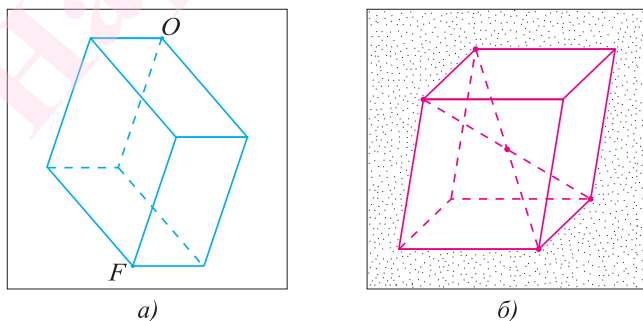


Рис. 7

4. Призма. Пирамида. *Призма (n -угольная)* — это многогранник, у которого две грани — равные n -угольники, а остальные n граней — параллелограммы. Равные n -угольники называются *основаниями*, а параллелограммы — *боковыми гранями* призмы.

Прямая призма — это такая призма, у которой боковые грани — прямоугольники.

Представление о форме прямой призмы дают, например, модели, которые получаются в результате распиливания деревянного бруска, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, вдоль ребра, как показано на рисунке 8, а. При этом получаются две модели, одна из которых представляет собой модель прямой пятиугольной призмы, а другая — модель прямой треугольной призмы.

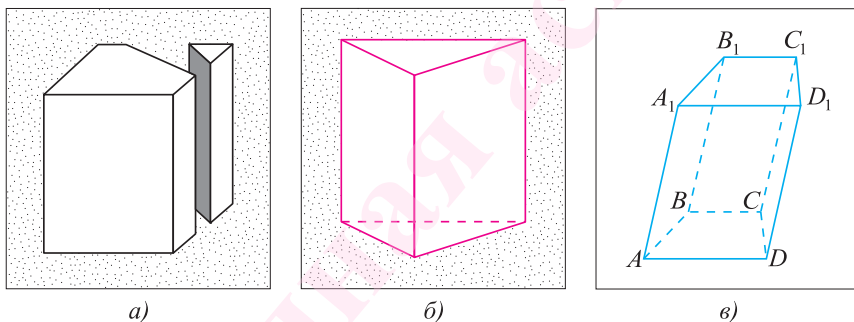


Рис. 8

Правильная n -угольная призма — это призма, у которой все боковые грани — прямоугольники, а ее основания — правильные n -угольники.

Сумма площадей боковых граней призмы называется площадью ее боковой поверхности (обозначается $S_{\text{бок}}$).

Сумма площадей всех граней призмы называется площадью поверхности призмы (обозначается $S_{\text{полн}}$).

Если основания призмы есть n -угольники $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$, то она обозначается $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$. На изображении призмы вершины обозначаются так, что отрезки A_1B_1 , A_2B_2 , ..., A_nB_n являются ее боковыми ребрами. На рисунке 8, б изображена треугольная призма, а на рисунке 8, в — четырехугольная, основания которой — четырехугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, а ее боковые ребра — отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 .

Пирамида (n -угольная) — это многогранник, у которого одна грань — какой-нибудь n -угольник, а остальные n граней — треугольники с общей вершиной; n -угольник называется *основанием*; треугольники, имеющие общую вершину, называются *боковыми гранями*, а их общая вершина называется *вершиной пирамиды*. Стороны граней пирамиды называются ее *ребрами*, а ребра, сходящиеся в вершине, называются *боковыми*.

Пирамида, вершина которой — точка S , а основание — n -угольник $A_1A_2...A_n$, обозначается $SA_1A_2...A_n$.

Сумма площадей боковых граней пирамиды называется *площадью боковой поверхности* пирамиды (обозначается $S_{\text{бок}}$).

Сумма площадей всех граней пирамиды называется *площадью поверхности* пирамиды (площадь поверхности обозначается $S_{\text{полн}}$).

Правильная n -угольная пирамида — это такая пирамида, основание которой — правильный n -угольник, а все боковые ребра равны между собой.

У правильной пирамиды боковые грани — *равные друг другу равнобедренные треугольники*.

Треугольная пирамида называется *тетраэдром*, если все ее грани — *равные правильные треугольники*. Тетраэдр является частным случаем правильной треугольной пирамиды.

Заметим, что не всякая правильная треугольная пирамида является тетраэдром.

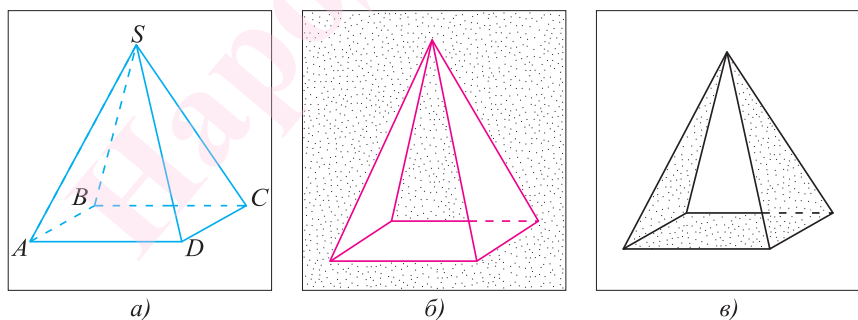


Рис. 9

На рисунке 9, а дано изображение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$. Пространственные фигуры, изображенные на рисунке 9, б, в, не являются пирамидами,

так как указанные треугольники и четырехугольник не ограничивают части пространства.

В дальнейшем, если дано изображение какого-либо многогранника, иногда будем говорить, что дан многогранник.

Вопросы и задачи к § 1

1. Какие фигуры в стереометрии являются основными?
2. Верно ли, что за изображение прямоугольного треугольника можно принять любой треугольник?
3. Верно ли, что за изображение равностороннего треугольника можно принять любой треугольник?
4. Дайте описание многогранника.
5. Какой многогранник является: а) кубом; б) параллелепипедом; в) призмой?
6. Верно ли, что прямая призма является правильной? Верно ли, что призма, основаниями которой служат правильные n -угольники, есть правильная призма?
7. Охарактеризуйте прямоугольный параллелепипед.
8. Что называется: а) площадью поверхности призмы; б) площадью боковой поверхности призмы?
9. Какой многогранник является пирамидой?
10. Верно ли, что пирамида, основание которой — правильный n -угольник, является правильной пирамидой?
11. В чем отличие тетраэдра от правильной треугольной пирамиды?
12. Что называется: а) площадью боковой поверхности пирамиды; б) площадью поверхности пирамиды?
13. Поясните, почему изображения фигур, данные на рисунке 10, а, б, в, можно принять за изображение: а) параллелепипеда; б) прямоугольного параллелепипеда; в) куба.
14. Верно ли, что любые две боковые грани правильной n -угольной призмы — равные прямоугольники?

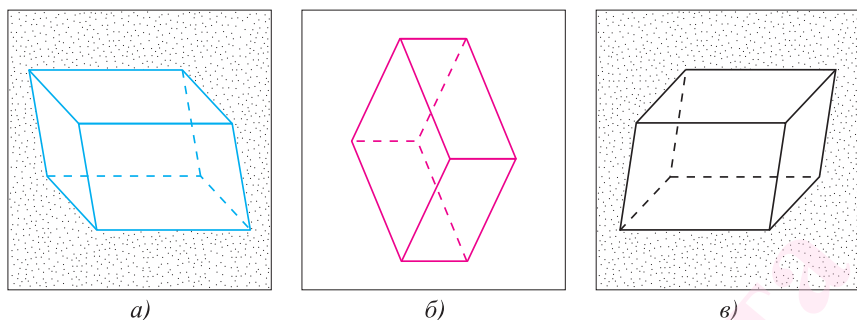


Рис. 10

15. Верно ли, что любые две боковые грани правильной n -угольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники?

16. На рисунке 11, *а* выделены треугольники, принадлежащие граням куба. Можно ли утверждать, что каждые два из них — равные треугольники?

17. На рисунке 11, *б* отрезок SF — медиана боковой грани SCB правильной треугольной пирамиды $SABC$. Почему отрезок SF является высотой треугольника CSB ?

18. На рисунке 11, *в* точки T и F — середины ребер AD и AB правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$. Объясните, почему отмеченные на гранях пирамиды треугольники SAT и SBF являются равными.

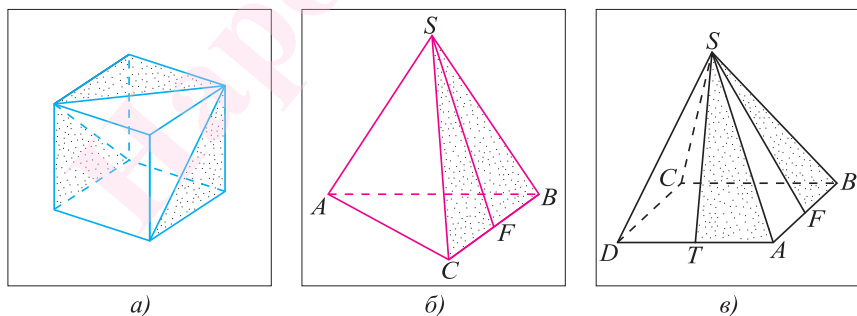


Рис. 11

19. Радиус окружности, вписанной в одну из граней куба, равен 1 см. Вычислите площадь поверхности куба.

20. Площадь поверхности тетраэдра равна S . Найдите длину ребра данного тетраэдра.

21. Основание прямоугольного параллелепипеда — квадрат, длина диагонали которого равна $\sqrt{2}$ см. Вычислите длину диагонали боковой грани, если площадь боковой грани параллелепипеда равна 3 см^2 .

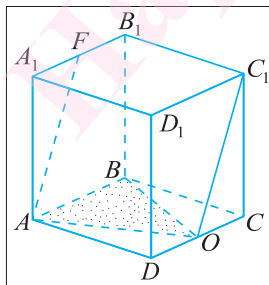
22. Изобразите в тетради правильную треугольную пирамиду и отметьте на этом изображении точку пересечения медиан какой-либо из ее граней.

23. Изобразите тетраэдр и отрезок, соединяющий точки пересечения медиан двух его граней.

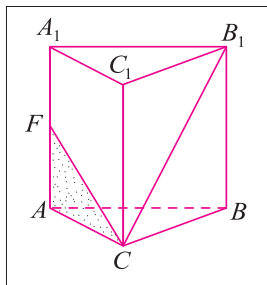
24. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, точки O и F — середины ребер DC и $A_1 B_1$ соответственно, $BC = 2$ см. а) Докажите, что треугольник AOB равнобедренный. б) Вычислите площадь треугольника $AA_1 F$. в) Вычислите периметр треугольника OCC_1 (рис. 12, а).

25. $ABCA_1 B_1 C_1$ — правильная треугольная призма, все ребра которой равны между собой, F — середина ребра AA_1 , $CB_1 = 2\sqrt{2}$ см. Вычислите: а) длину ребра призмы; б) площадь основания призмы; в) радиус окружности, описанной около треугольника CAF (рис. 12, б).

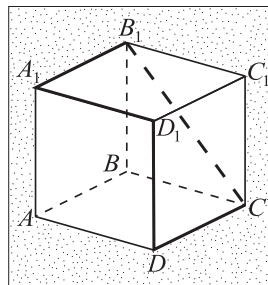
26. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. Длина пространственной ломаной $A_1 D_1 DCB_1 A_1$ равна 4 см (рис. 12, в). Вычислите площадь поверхности данного куба.



а)



б)



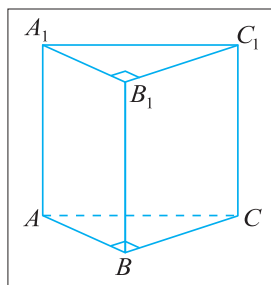
в)

Рис. 12

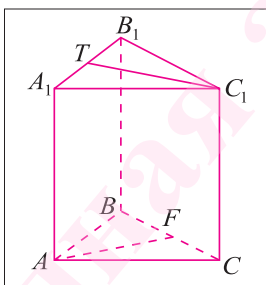
27. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, основание которого — квадрат, длина стороны которого 3 см. Вычислите длину пространственной ломаной $AD_1 B_1 CA$, если длина бокового ребра параллелепипеда равна 4 см.

28. $ABCA_1 B_1 C_1$ — прямая треугольная призма, основание которой — равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине B (рис. 13, а). Вычислите площадь грани $AA_1 C_1 C$, если $AB = 2$ см и $AA_1 = 3$ см.

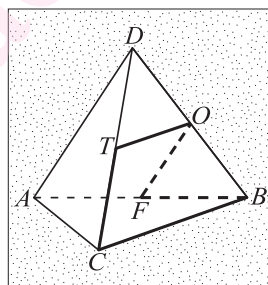
29. $ABCA_1 B_1 C_1$ — правильная треугольная призма. Точки T и F — середины ребер $A_1 B_1$ и BC соответственно (рис. 13, б). а) Верно ли, что радиус окружности, описанной около треугольника $A_1 B_1 C_1$, равен $\frac{2}{3} C_1 T$? б) Докажите, что отрезок AF есть высота треугольника ABC .



а)



б)



в)

Рис. 13

30. $DABC$ — тетраэдр (рис. 13, в). Точки T , O и F — середины ребер DC , DB и AB соответственно. Вычислите площадь поверхности тетраэдра, если известно, что длина пространственной ломаной, образованной отрезками CB , BF , FO , OT и TC , равна 9 см.

31. $SABC$ — правильная треугольная пирамида, боковое ребро которой в два раза больше стороны основания. Точки T , K , P и E — середины ребер SC , SB , BC и AC соответственно. Вычислите длину ломаной $TKBPET$, если сумма длин всех ребер пирамиды равна 18 см.

32. $ABCA_1 B_1 C_1$ — правильная треугольная призма, все ребра которой равны между собой. Площадь основания призмы

равна $4\sqrt{3}$ см². Вычислите длину пространственной ломаной $CABB_1C$ (рис. 14, а, б).

33. Боковое ребро правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в два раза больше стороны основания. Вычислите площадь боковой поверхности призмы, если длина ломаной, образованной отрезками AA_1 , A_1C , CB_1 , B_1B и BA , равна $\sqrt{5}(\sqrt{5} + 2)$ см.

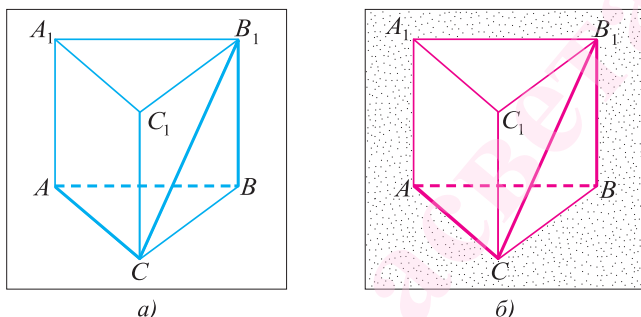


Рис. 14

34. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой в два раза больше стороны основания. Точки T , K , и E — середины ее ребер SB , SA и SD соответственно (рис. 15). Вычислите длину пространственной ломаной, образованной отрезками DC , CB , BT , TK , KE , и ED , если площадь основания пирамиды равна 16 см².

35. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны между собой. Точки T и K — середины ребер SC и BC соответственно. Вычислите площадь основания пирамиды, если длина ломаной $KTSDK$ равна $(4 + \sqrt{5})$ см.

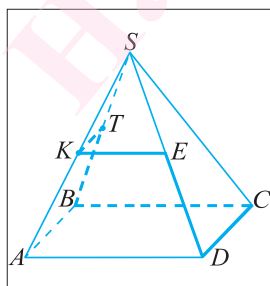
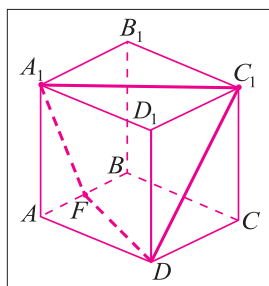
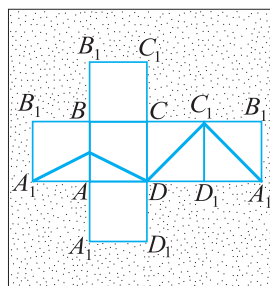


Рис. 15



а)



б)

Рис. 16

36. На рисунке 16, *а*, *б* изображены куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и его развертка, точка F — середина ребра AB куба. Вычислите радиус окружности, вписанной в грань куба, если длина ломаной $A_1 F D C_1 A_1$ равна $(2\sqrt{5} + 2\sqrt{2})$ см.

37. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, основание которого — квадрат. Площадь боковой поверхности параллелепипеда равна 672 см^2 , а радиус окружности, вписанной в треугольник $DD_1 C$, равен 3 см. Вычислите длины ребер параллелепипеда.

38. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит квадрат. Длина диагонали боковой грани параллелепипеда равна 13 см, а радиус окружности, вписанной в треугольник DAA_1 , равен 2 см. Вычислите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

39. $TABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, длина бокового ребра которой равна 8 см. Точка K — середина ребра TC . Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды, если $DK = 6$ см.

40. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды $TABCD$ равна $4\sqrt{15} \text{ см}^2$, а длина бокового ребра — 4 см. Вычислите площадь основания $ABCD$ пирамиды, если радиус окружности, вписанной в треугольник TDC , равен $\frac{15}{5}$ см.

41. $ABCA_1 B_1 C_1$ — прямая треугольная призма, основание которой — прямоугольный треугольник ABC . Длина бокового ребра призмы равна 8 см. Вычислите площадь боковой поверхности призмы, если радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , равен 2 см, а радиус описанной около него окружности — 5 см.

42. Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O . Разность между периметрами треугольников BOC и ABO равна 8 см, а периметр основания призмы — 32 см. Вычислите длины диагоналей боковых граней призмы, если площадь ее боковой поверхности равна 160 см^2 .

43. Основание прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — равнобедренная трапеция $ABCD$, в которую вписана окружность. Длина боковой стороны трапеции равна 6 см и образует с основанием трапеции угол, градусная мера которого 30° . Вычислите длину бокового ребра призмы, если площадь ее поверхности равна 84 см^2 .

44. На поверхности куба расположена полоска, ширина которой 1 см. Вычислите: а) площадь поверхности куба, если площадь полоски равна 44 см^2 (рис. 17, а); б) объем куба, если площадь полоски равна 45 см^2 (рис. 17, б).

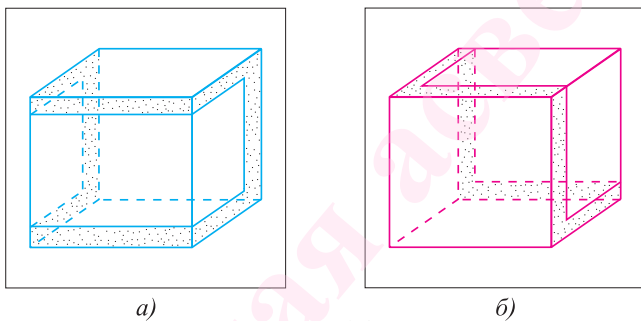


Рис. 17

45. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны между собой. Точки T и F — середины ребер SA и SC соответственно. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды, если площадь треугольника DTF равна $8\sqrt{5} \text{ см}^2$.

46. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ длина бокового ребра в два раза больше длины стороны основания. Вычислите радиус окружности, описанной около грани SCD , если площадь треугольника SAC равна $2\sqrt{7} \text{ см}^2$.

§ 2. Аксиомы стереометрии

В первом параграфе уже отмечалось, что в стереометрии основными фигурами являются точки, прямые и плоскости. Как и в планиметрии, точки обозначаются заглавными латинскими буквами $A, B, C, \dots$, а прямые — строчными латинскими буквами $a, b, c, \dots$ или двумя заглавными латинскими буквами AB, CE и т. д., плоскости — строчными буквами греческого алфавита α, β, γ и т. д.

Если точка A лежит на прямой a (в плоскости α), то говорят, что прямая a (плоскость α) проходит через точку A , и пишут: $A \in a$, ($A \in \alpha$).

Если точка B не принадлежит прямой a (плоскости α), то говорят, что прямая a (плоскость α) не проходит через точку B , и записывают: $B \notin a$ ($B \notin \alpha$).

Например, на рисунке 18, а, б изображены точки A и O , лежащие на прямой a , и точки B и M , которые не лежат в плоскости α , где α — плоскость, в которой лежит грань куба (рис. 18, а, б).

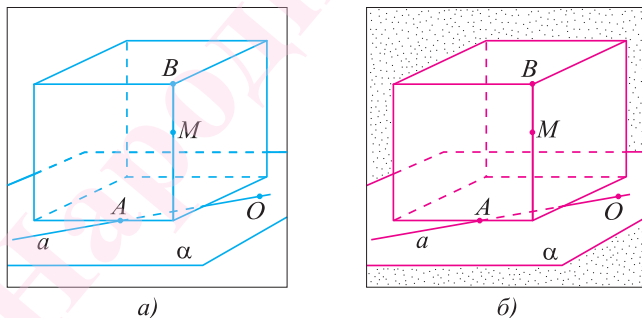


Рис. 18

Свойства геометрических фигур в пространстве устанавливаются путем логических рассуждений на основе некоторых утверждений (аксиом), которые принимаются без доказательств.

Часть аксиом, используемых в стереометрии, известны уже из курса планиметрии. Здесь сформулируем только три

аксиомы о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей, которые являются специфически пространственными.

А 1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость.

Плоскость, проходящую через точки A , B и C , не лежащие на одной прямой, обозначают ABC или (ABC) .

Например, на рисунке 19, a , b изображена треугольная пирамида $DABC$. Плоскость α проходит через точки A , B и C ; через точки C , B и D проходит плоскость CBD .

На аксиоме А 1 основано устройство штативов некоторых измерительных приборов. Острия ножек штатива расположены в одной плоскости, поэтому измерительный прибор занимает устойчивое положение.

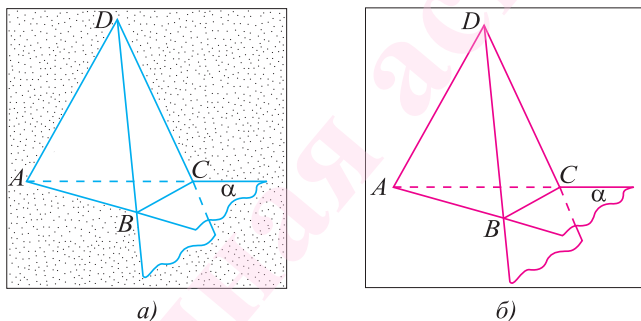


Рис. 19

А 2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

Если каждая точка прямой a лежит в плоскости β , то говорят, что прямая a лежит в плоскости β или плоскость β проходит через прямую a , и пишут $a \subset \beta$.

На рисунке 20, a , b ($ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб) β — плоскость, проходящая через точки A , D и C . Прямая AD лежит в плоскости β , а прямые DB_1 и CC_1 в плоскости β не лежат. Плоскость $DA_1 B_1$ не проходит через прямую AD .

Если прямая a и плоскость α имеют только одну общую точку O , то говорят, что они пересекаются в точке O , и пишут: $O = a \cap \alpha$.

На рисунке 20, a , b изображена прямая CC_1 , которая пересекает плоскость β в точке C , а прямая DB_1 — в точке D ($D = \beta \cap DB_1$).

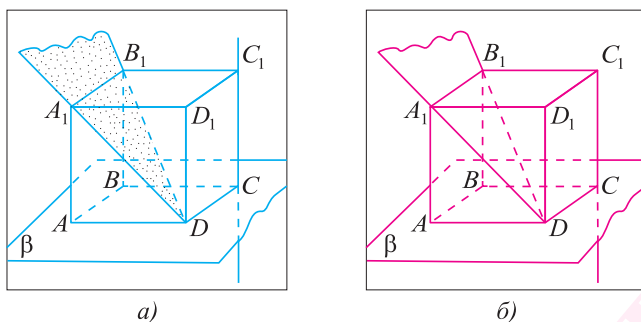


Рис. 20

А 3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Если прямая a — общая прямая плоскости α и плоскости β , то говорят, что эти плоскости пересекаются по прямой a , и пишут: $a = \alpha \cap \beta$.

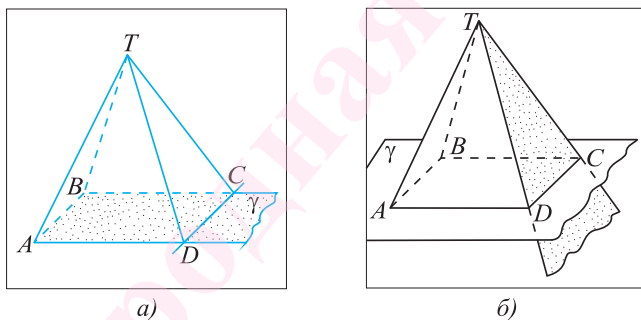


Рис. 21

Например, на рисунке 21, a , b γ — плоскость, проходящая через вершины A , D и C четырехугольной пирамиды $TABCD$. Прямая CD лежит в каждой из плоскостей γ и TDC (точки C и D лежат в каждой из этих плоскостей, значит, по аксиоме А 2 прямая CD общая для плоскостей γ и TDC), следовательно, указанные плоскости пересекаются по прямой CD т. е. $CD = \gamma \cap (TDC)$.

Задача 1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. Точки P и T — середины ребер $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$ соответственно. Докажите, что прямая PT лежит в плоскости $A_1 B_1 C_1$.

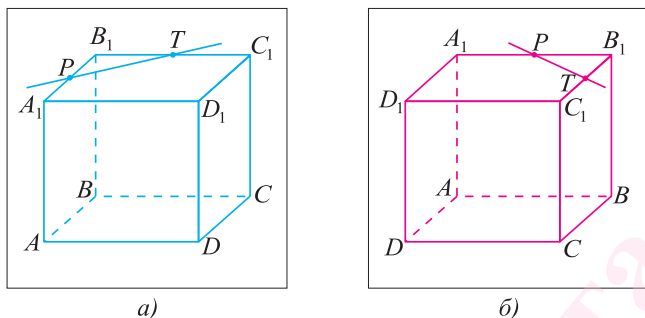


Рис. 22

Доказательство.

1) Так как $B_1C_1 \subset (A_1B_1C_1)$ и $T \in B_1C_1$, то по аксиоме А 2 точка $T \in (A_1B_1C_1)$.

2) Поскольку $A_1B_1 \subset (A_1B_1C_1)$ и $P \in A_1B_1$, то $P \in (A_1B_1C_1)$.

3) Таким образом, $T \in (A_1B_1C_1)$ и $P \in (A_1B_1C_1)$, следовательно, $PT \subset (A_1B_1C_1)$ (аксиома А 2) (рис. 22, а, б).

Задача 2. Плоскости α и β пересекаются по прямой a , а прямая b , лежащая в плоскости α , пересекается с плоскостью β . Докажите, что прямые a и b пересекаются.

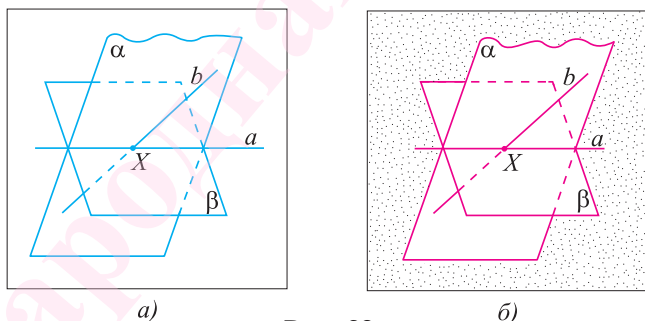
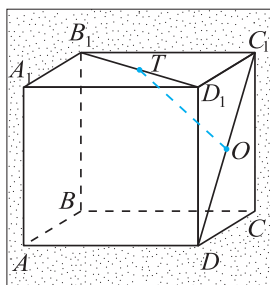


Рис. 23

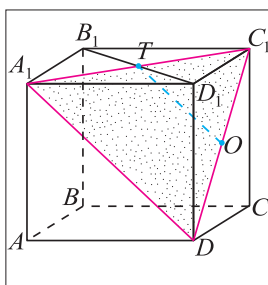
Доказательство.

Пусть прямая b и плоскость β пересекаются в точке X (рис. 24, а, б). Так как прямая b лежит в плоскости α , то каждая ее точка, а следовательно, и точка X лежит в этой плоскости. Таким образом, точка X — общая точка плоскостей α и β . Плоскости α и β пересекаются по прямой a , поэтому на этой прямой лежат все общие точки плоскостей α и β (аксиома А 3), а значит, и точка X лежит на прямой a . Таким образом, точка X лежит на каждой прямой a и b , т. е. прямые a и b пересекаются в точке X .

Задача 3. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки T и O — середины отрезков $B_1 D_1$ и $C_1 D$ соответственно. Найдите длину отрезка TO , если ребро куба a (рис. 24, а).



а)



б)

Рис. 24

Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб,
 $T \in B_1 D_1$,
 $B_1 T = T D_1$,
 $O \in D C_1$,
 $D O = O C_1$, $A D = a$.

Найти:

длину TO .

Решение.

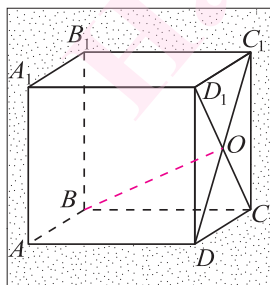
1) Точка T есть точка пересечения диагоналей грани $A_1 B_1 C_1 D_1$, т. е. середина отрезка $A_1 C_1$. Следовательно, отрезок TO — средняя линия треугольника $A_1 C_1 D$ (рис. 24, б).

2) В треугольнике $A_1 A D$ ($\angle A_1 A D = 90^\circ$, $A D = A A_1 = a$) длина гипотенузы $A_1 D = \sqrt{A A_1^2 + A D^2} = a\sqrt{2}$.

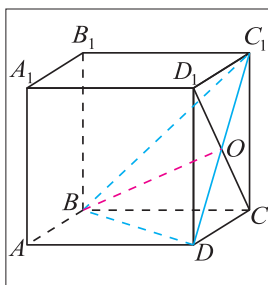
3) Отрезок TO — средняя линия треугольника $A_1 C_1 D$. Следовательно, $TO = \frac{1}{2} A_1 D = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Задача 4. Найдите расстояние от вершины B куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ до точки пересечения диагоналей грани $DD_1 C_1 C$, если ребро куба равно a (рис. 25, а, б).



а)



б)

Рис. 25

Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб,
 $O = D_1 C \cap D C_1$,
 $A D = a$.

Найти:

длину BO .

Решение.

1) Треугольник BDC_1 — равносторонний, так как его стороны — диагонали равных квадратов: $BD = BC_1 = DC_1 = \sqrt{DC^2 + CC_1^2} = a\sqrt{2}$ (рис. 25, б).

2) Точка O — середина отрезка DC_1 (диагонали квадрата точкой пересечения делятся пополам), следовательно, отрезок BO есть медиана треугольника BDC_1 .

3) Так как треугольник BDC_1 равносторонний, то его медиана BO является и высотой: $BO \perp DC_1$.

4) В треугольнике

BDO ($\angle BOD = 90^\circ$, $BD = a\sqrt{2}$, $DO = \frac{1}{2}DC_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$) длина катета $BO = \sqrt{BD^2 - DO^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Вопросы и задачи к § 2

47. Всегда ли через три точки проходит единственная плоскость?

48. В пространстве даны четыре различные точки. Сколько плоскостей проходит через каждые три из этих точек?

49. Могут ли вершины замкнутой ломаной из трех звеньев не принадлежать ни одной плоскости?

50. Могут ли вершины замкнутой ломаной из четырех звеньев не принадлежать одной плоскости?

51. Верно ли, что прямая лежит в плоскости, если две ее точки лежат в этой плоскости?

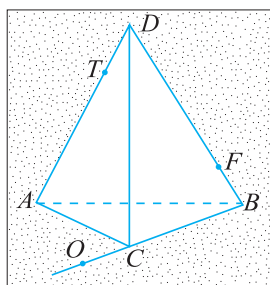
52. Прямая l пересекает стороны треугольника FOK в двух точках. Верно ли, что прямая l лежит в плоскости FOK ?

53. Окружность описана около треугольника ABC . Верно ли, что все точки окружности принадлежат плоскости ABC ?

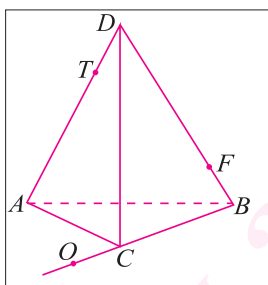
54. Окружность имеет с плоскостью две общие точки. Верно ли, что все точки окружности принадлежат этой плоскости?

55. Две плоскости имеют две общие точки. Верно ли, что эти плоскости имеют общую прямую?

56. На рисунке 26, а, б изображена треугольная пирамида $DABC$, $T \in AD$, $F \in DB$, $O \in CB$. а) Назовите прямые, на которых лежит точка F . б) Докажите, что прямая CT лежит в плоскости ACD . в) Верно ли, что прямая OF лежит в плоскости DBC ? г) Назовите прямые, через которые проходит плоскость ADB .



а)



б)

Рис. 26

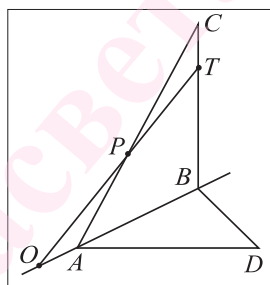


Рис. 27

57. Дана треугольная пирамида $DABC$. Точка T лежит на ребре DB , а точка E — на продолжении ребра DC . Постройте: а) точку пересечения прямой TE и плоскости ABC ; б) прямую, по которой пересекаются плоскости ATE и ABC .

58. Треугольники ABC и ABD не лежат в одной плоскости (рис. 27). $O \in AB$, $T \in CB$, $P = AC \cap OT$. а) Назовите точку пересечения прямой PT и плоскости ABD . б) По какой прямой пересекаются плоскости TPD и ABD ? в) Докажите, что прямая TD лежит в плоскости CBD . г) Докажите, что точка O лежит в плоскости TPD .

59. Треугольник ABC и параллелограмм $ABED$ лежат в разных плоскостях. Точка O лежит на стороне DE , а точка P — на продолжении стороны AD . Постройте: а) точку пересечения прямой OP с плоскостью ABC ; б) прямую, по которой пересекаются плоскости ABC и CPO .

60. $TABCD$ — четырехугольная пирамида, $K \in AT$, $O \in TC$, $E \in TC$ (рис. 28). а) Назовите прямые, по которым пересека-

ются плоскости ABT и TBC , TBE и TDC . б) Докажите, что прямая KO лежит в плоскости ATC . в) Верно ли, что прямая EK лежит в плоскости ATC ?

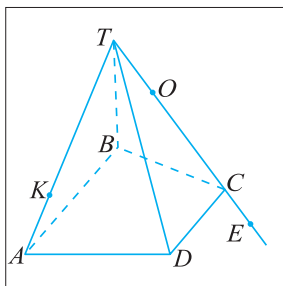


Рис. 28

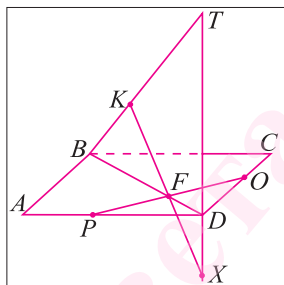


Рис. 29

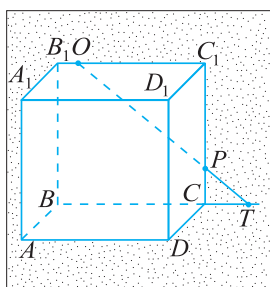
61. Точки T и K — середины ребер AD и DC пирамиды $PABCD$ соответственно, основание которой есть четырехугольник $ABCD$. Постройте: а) точку пересечения прямой KT и плоскости PBC ; б) прямую, по которой пересекаются плоскости PTK и PBC .

62. На рисунке 29 изображены параллелограмм $ABCD$ и треугольник BDT , не лежащие в одной плоскости. а) Назовите точку пересечения прямой PO и плоскости BDT . б) По какой прямой пересекаются плоскости TPO и BDT ? в) Верно ли, что прямая KX лежит в плоскости BDT ?

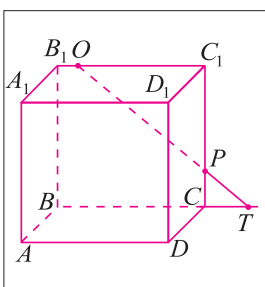
63. Параллелограммы $ABCD$ и $ABEF$ не лежат в одной плоскости. Точки K и O — середины отрезков CB и BE соответственно. а) Постройте точку $X = AK \cap (DCE)$. б) Постройте точку пересечения прямой EF и плоскости AOK . в) Докажите, что прямая KO лежит в плоскости CBE .

64. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб (рис. 30, а, б), $O \in B_1 C_1$, $P \in CC_1$. а) Докажите, что прямая OP лежит в плоскости $B_1 BC$. б) Верно ли, что плоскости ABB_1 и ABC пересекаются по прямой AB ? в) Назовите точку пересечения прямой OP и плоскости ADC .

65. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки T и E — середины ребер AB и AD соответственно. Постройте: а) точку пересечения прямой TE и плоскости $D_1 DC$; б) прямую, по которой пересекаются плоскости TEC и DCC_1 .



а)



б)

Рис. 30

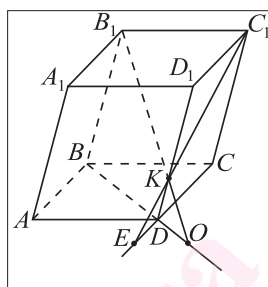


Рис. 31

66. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, $K \in DD_1$, $E = C_1 K \cap CD$, $O = B_1 K \cap BD$ (рис. 31). а) Назовите точку пересечения прямой $B_1 K$ с плоскостью ADC . б) В какой точке прямая $C_1 E$ пересекает плоскость ADD_1 ? в) Верно ли, что плоскость $B_1 C_1 K$ пересекает плоскость ABC по прямой EO ?

67. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Точки E и K — середины ребер AA_1 и AD соответственно. Постройте: а) точку пересечения прямой EK и плоскости $B_1 A_1 D_1$; б) прямую, по которой пересекаются плоскости EKB_1 и $B_1 A_1 D_1$.

68. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, $O \in BB_1$, $K \in DD_1$, $T \in CC_1$, $X = OT \cap B_1 C_1$, $F = KT \cap D_1 C_1$ (рис. 32). а) Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости OTK и $B_1 C_1 D_1$. б) В какой точке прямая $A_1 B_1$ пересекает плоскость OTK ? в) Верно ли, что плоскости OTK и $A_1 B_1 B$ пересекаются по прямой OP ?

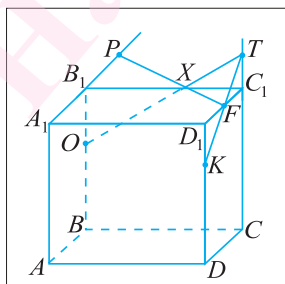


Рис. 32

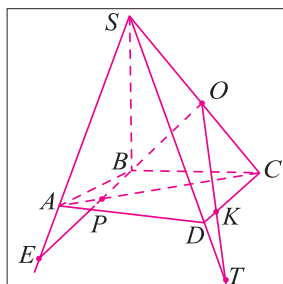


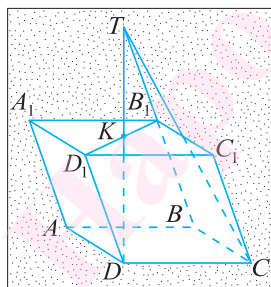
Рис. 33

69. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки T , K и O — середины отрезков $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и DC_1 соответственно. Постройте: а) точку пересечения прямой KT с плоскостью $DD_1 C_1$; б) прямую, по которой пересекаются плоскости TKO и $DD_1 C_1$.

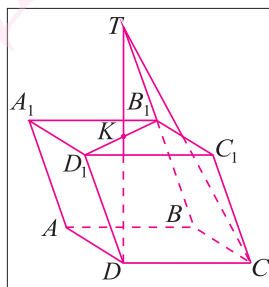
70. $SABCD$ — четырехугольная пирамида, $O \in SC$, $T \in SD$, $E \in SA$, $P = AC \cap OE$, $K = DC \cap OT$ (рис. 33). а) Докажите, что прямая EO лежит в плоскости SAC . б) Назовите точку пересечения прямой OK с плоскостью SAD . в) Верно ли, что прямая EO пересекает плоскость ABC в точке P ? г) Докажите, что плоскости KOP и SAD пересекаются по прямой ET .

71. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, диагонали основания которой AC и BD пересекаются в точке O . Точка T — середина отрезка OA , а точка E лежит на прямой OD так, что $OD = DE$. Постройте: а) точку пересечения прямой TE с плоскостью SBC ; б) прямую, по которой пересекаются плоскости STE и SBC .

72. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, $K \in D_1 B_1$, $T = DK \cap BB_1$ (рис. 34, а, б). а) Докажите, что прямая TD и плоскость $D_1 B_1 C_1$ пересекаются в точке K . б) Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости TDC и $BB_1 C_1$. в) Верно ли, что плоскости DCT и $BC_1 C$ пересекаются по прямой TC ?



а)



б)

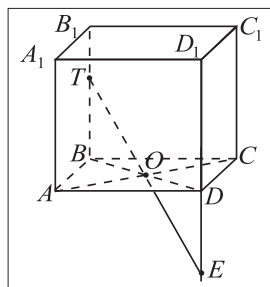


Рис. 35

Рис. 34

73. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте: а) точку O пересечения плоскости $AB_1 C$ с прямой BD ; б) точку пересечения прямой DD_1 и прямой $B_1 O$; в) прямую, по которой пересекаются плоскости $AB_1 C$ и DCC_1 .

74. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, $T \in BB_1$, $O = BD \cap AC$, $E = TO \cap DD_1$ (рис. 35). а) В какой точке прямая TE пересекается с плоскостью AB_1C ? б) Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости ATE и BDD_1 . в) Верно ли, что плоскости AA_1B_1 и ATE пересекаются по прямой AT ?

75. Точки T и K — середины ребер D_1C_1 и C_1C куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно. Постройте: а) точку Q , в которой пересекаются прямая TK и плоскость A_1D_1D ; б) прямую, по которой пересекаются плоскости BQT и $B_1C_1D_1$.

76. Дана треугольная пирамида $SABC$. Докажите, что любая прямая, проходящая через вершину B и пересекающая прямую SC , лежит в плоскости SBC .

77. В пространстве даны три точки O , A и B , не лежащие на одной прямой. Докажите, что все прямые, проходящие через точку O и пересекающие прямую AB , лежат в одной плоскости.

78. $SABC$ — треугольная пирамида. Докажите, что любая прямая, не проходящая через вершину S и пересекающая одновременно прямые SB и SC , лежит в плоскости SCB .

79. В пространстве даны три точки O , A и B , не лежащие на одной прямой. Докажите, что все прямые, не проходящие через точку O и пересекающие одновременно прямые OA и OB , лежат в одной плоскости.

80. Точки A , B и C не лежат на одной прямой. Прямая a проходит через точку C . Верно ли, что прямая a лежит в плоскости ABC ? Приведите примеры.

81. Треугольник ABC лежит в плоскости α . Прямая a пересекает одновременно прямые AB и BC . Верно ли, что прямая a лежит в плоскости ABC ?

82. Дана треугольная пирамида $TABC$. Точки O и E — середины ребер TC и TB соответственно. Докажите, что каждая точка прямой OE лежит в плоскости TCB .

83. Все точки медианы AE треугольника ABC лежат в плоскости α . Верно ли, что плоскости ABC и α совпадают?

84. Вершины A , B и точка O пересечения медиан треугольника ABC лежат в плоскости α . Докажите, что треугольник ABC лежит в плоскости α .

85. Прямая a проходит через точку пересечения медиан треугольника ABC . Верно ли, что прямая a лежит в плоскости α ? Приведите примеры.

86. Две смежные вершины и точка пересечения диагоналей параллелограмма лежат в плоскости α . Докажите, что две другие вершины параллелограмма лежат в этой плоскости.

87. $SABC$ — треугольная пирамида. Точки P и T лежат в гранях SAC и SBC соответственно (рис. 36, а). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте точку пересечения прямой PT с плоскостью SAB .

88. $SABCD$ — четырехугольная пирамида. Точка O — точка пересечения медиан грани SCD . Постройте точку пересечения прямой AO с плоскостью SBC .

89. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида (рис. 36, б). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте прямую, по которой пересекаются плоскости PQR и ABC .

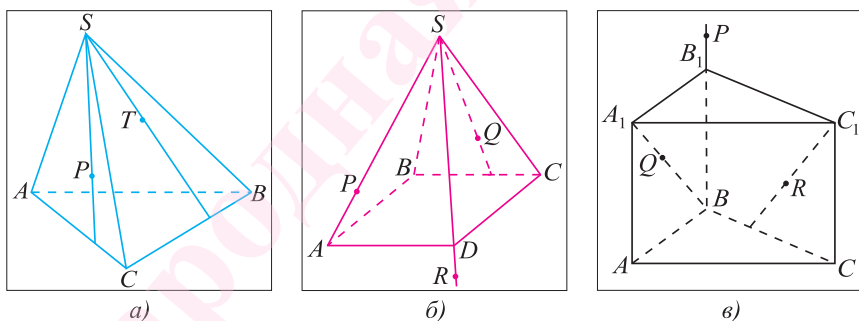


Рис. 36

90. $SABCD$ — четырехугольная пирамида. Точки R и Q лежат на боковых ребрах SA и SB соответственно. Точка P лежит на продолжении ребра BC так, что $BC : CP = 2 : 1$. Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости PQR и SCD .

91. $ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма (рис. 36, в). Перечертите рисунок в тетрадь. Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости PQR и A_1AC .

92. Докажите, что любой треугольник, одна из сторон которого есть ребро куба, а противоположная ей вершина — вершина куба, является прямоугольным.

93. Площадь грани куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна S . Найдите площадь поверхности четырехугольной пирамиды $OA_1 B_1 C_1 D_1$, где точка O — точка пересечения диагоналей грани $ABCD$.

94. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ длина стороны основания равна a . Найдите площадь поверхности призмы, если угол при вершине C_1 треугольника $BC_1 D$ равен α .

95. Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 2 см. Вычислите радиус окружности, вписанной в треугольник $B_1 A D$.

96. $ABCA_1 B_1 C_1$ — правильная треугольная призма, длина бокового ребра которой равна 6 см, а стороны основания — 4 см. Вычислите площадь треугольника ACB_1 .

97. Точка T — середина ребра DD_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $A_1 C_1 T$, если длина ребра куба равна α .

§ 3. Следствия из аксиом

Из курса планиметрии мы уже знаем, что утверждение, справедливость которого обосновывается путем логических рассуждений, называется теоремой, а само обоснование — доказательством. Докажем некоторые следствия из аксиом. Доказать теорему — значит путем рассуждений обосновать, что она следует из некоторых аксиом или ранее доказанных теорем. Очевидность не является критерием справедливости теорем, поэтому в процессе доказательств, обращаясь к рисункам, необходимо одновременно следить за правильностью рассуждений, чтобы быть уверенными в справедливости сделанных выводов.

Теорема 1. *Через прямую и не лежащую на ней точку проходит единственная плоскость.*

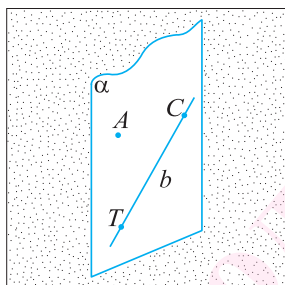


Рис. 37

Дано:

Точка A не принадлежит прямой b .

Доказать:

Существует единственная плоскость, проходящая через точку A и прямую b .

Доказательство.

I. *Докажем, что такая плоскость существует.*

- 1) Пусть точка A не лежит на прямой b ($A \notin b$).
- 2) Отметим на прямой b две точки T и C .
- 3) Точки A , T и C не лежат на одной прямой, следовательно, по аксиоме **A 1** через эти точки проходит некоторая плоскость α ($A \in \alpha$, $T \in \alpha$, $C \in \alpha$) (рис. 37).

4) Точки T и C прямой b лежат в плоскости α , значит, по аксиоме **A 2** плоскость α проходит через точку A и прямую b ($A \in \alpha$, $b \in \alpha$) (см. рис. 37).

II. *Докажем единственность этой плоскости.*

- 1) Допустим, что существует еще одна плоскость β , проходящая через точку A и прямую b .

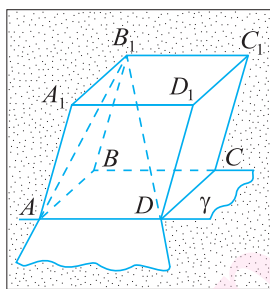
2) Так как плоскость β проходит через прямую b , а точки T и C лежат на прямой b , то плоскость β проходит через точки A , T и C , не лежащие на одной прямой.

3) По аксиоме **A 1** существует только одна плоскость, проходящая через точки A , T и C , не лежащие на одной прямой. Следовательно, плоскость β совпадает с плоскостью α .

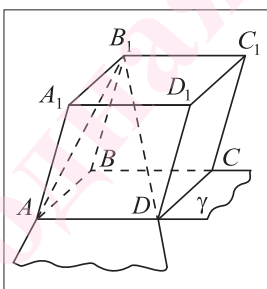
Теорема доказана.

Например, пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед (рис. 38, а, б). Через прямую AD и точку B проходит единственная плоскость γ , которая совпадает с плоскостью ABD , проходящей через точки A , B и D . Действительно, точки A и D лежат в плоскости ABD , следовательно, прямая AD лежит в этой плоскости (аксиома **A 2**). Плоскость ABD проходит через точку B и прямую AD , следовательно, она совпадает с плоскостью γ , так как по теореме 1 такая плоскость единственная.

Через прямую AD и точку B_1 проходит единственная плоскость ADB_1 . Плоскости γ и ADB_1 пересекаются по прямой AD (см. рис. 38, а, б).



а)



б)

Рис. 38

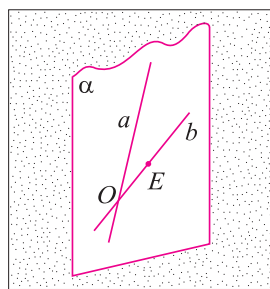


Рис. 39

Теорема 2. Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.

Доказательство.

1. Докажем существование плоскости.

1) Пусть прямые a и b пересекаются в точке O ($O = a \cap b$), E — некоторая точка на прямой b , не совпадающая с точкой O (рис. 39).

2) Тогда по теореме 1 существует плоскость α , проходящая через точку E и прямую a ($E \in \alpha$, $a \in \alpha$).

3) Точки O и E прямой b лежат в плоскости α , следовательно, по аксиоме **A 2** плоскость α проходит через прямую b . Таким образом, существует плоскость α , проходящая через прямые a и b .

II. Докажем, что такая плоскость единственная.

1) Допустим, что существует еще одна плоскость β , проходящая через прямые a и b .

2) Точка E лежит на прямой b , следовательно, плоскость β проходит через точку E и прямую a . По теореме 1 через точку E и прямую a проходит единственная плоскость, значит, плоскость β совпадает с плоскостью α .

Теорема доказана.

Например, пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед (рис. 40, а, б). Через прямые AD и DC проходит единственная плоскость α , через прямые AB_1 и $B_1 C$ проходит единственная плоскость β .

Плоскости α и β пересекаются по прямой AC ($AC = \alpha \cap \beta$).

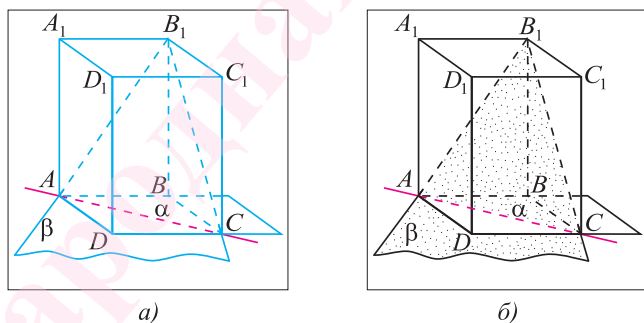


Рис. 40

В заключение подчеркнем, что в силу теорем 1 и 2 возможны еще два способа задания плоскости: а) существует единственная плоскость, проходящая через прямую и не принадлежащую ей точку; б) существует единственная плоскость, проходящая через две пересекающиеся прямые.

Вопросы и задачи к § 3

98. Верно ли, что через любые три точки проходит единственная плоскость?

99. Проиллюстрируйте на примерах геометрических фигур, что не всякие четыре точки лежат в одной плоскости.

100. Верно ли, что через прямую и точку, ей не принадлежащую, проходит единственная плоскость?

101. Даны две пересекающиеся прямые. Всякая ли третья прямая, имеющая с каждой из данных прямых одну общую точку, лежит с ними в одной плоскости?

102. $DABC$ — треугольная пирамида, точки F и K лежат на ребре BC (рис. 41). Назовите плоскости, проходящие через прямую AD .

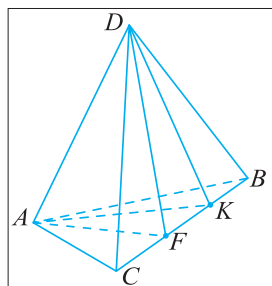


Рис. 41

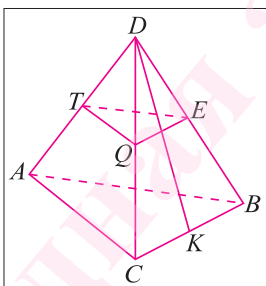


Рис. 42

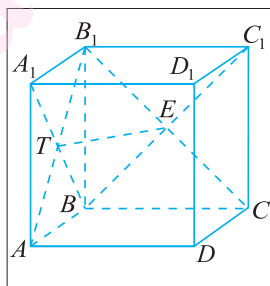


Рис. 43

103. Верно ли, что через любую прямую и точку проходит единственная плоскость?

104. В пространстве даны прямая a и не лежащая на ней точка O . Докажите, что все прямые, проходящие через точку O и пересекающие прямую a , лежат в одной плоскости.

105. Прямые a , b и c попарно пересекаются и не имеют общей точки. Докажите, что они лежат в одной плоскости.

106. Точки A , B , C и F не лежат в одной плоскости. Могут ли прямые AB и CF пересекаться? Дайте обоснование ответа.

107. Точки T , Q и E — середины боковых ребер тетраэдра $DABC$ (рис. 42). Найдите длину медианы DK треугольника BCD , если периметр треугольника TQE равен 3 см.

108. Докажите, что если прямые AB и CD лежат в одной плоскости, то и прямые AC и BD лежат в одной плоскости.

109. Две прямые a и b пересекаются в точке O . Докажите, что все прямые, не проходящие через точку O и пересекающие каждую из данных прямых, лежат в одной плоскости.

110. Верно ли, что прямая лежит в плоскости данного треугольника, если она пересекает две стороны треугольника?

111. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб (рис. 43). Длина отрезка TE равна 5 см. Вычислите длину ребра куба.

112. $TABC$ — треугольная пирамида. Точка P лежит на ребре TB , а прямая l лежит в плоскости TAC . Перечертите рисунок в тетрадь и постройте: а) точку пересечения прямой l с плоскостью TBC ; б) прямую пересечения плоскости TBC с плоскостью, проходящей через прямую l и точку P (рис. 44).

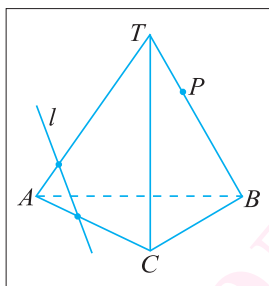


Рис. 44

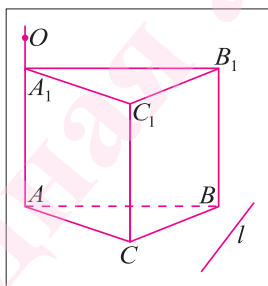


Рис. 45

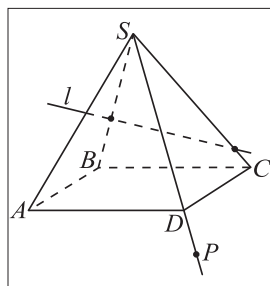


Рис. 46

113. $ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма. Точка O лежит на продолжении ребра AA_1 , а прямая l — в плоскости ABC (рис. 45). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте: а) точки пересечения прямой l с плоскостями A_1B_1B и AA_1C ; б) прямую пересечения плоскости $A_1B_1C_1$ с плоскостью, проходящей через прямую l и точку O .

114. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. Прямая l лежит в плоскости SBC , а точка P — на продолжении ребра SD (рис. 46). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте: а) точку пересечения прямой l с плоскостью основания; б) прямую пересечения плоскости основания с плоскостью, проходящей через прямую l и точку P .

115. Точки P , T и K — середины ребер SC , AD и AB четырехугольной пирамиды $SABCD$ соответственно. Постройте прямую, по которой пересекается плоскость SAD с плоскостью, проходящей через точку P и прямую TK .

116. $DABC$ — треугольная пирамида, точка F принадлежит ребру AD и не совпадает с вершинами пирамиды, а точка O лежит на прямой DB так, что точка B лежит между точками D и O . Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости ABC и FOC .

117. $TABC$ — треугольная пирамида, точка P принадлежит ребру AC и не совпадает с вершинами пирамиды, а точка F лежит на прямой CB так, что точка B лежит между точками C и F . Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости TAB и TPF .

§ 4. Построение сечений многогранников плоскостью

Для решения задач по стереометрии часто необходимо умение строить на рисунке сечения многогранников (например, пирамиды, параллелепипеда, куба, призмы) некоторой плоскостью. Поясним, что понимается под сечением.

Секущей плоскостью пирамиды (призмы, параллелепипеда, куба) называется такая плоскость, по обе стороны от которой есть точки данной пирамиды (призмы, параллелепипеда, куба).

Сечением пирамиды (призмы, параллелепипеда, куба) называется фигура, состоящая из всех точек, которые являются общими для пирамиды (призмы, параллелепипеда, куба) и секущей плоскости.

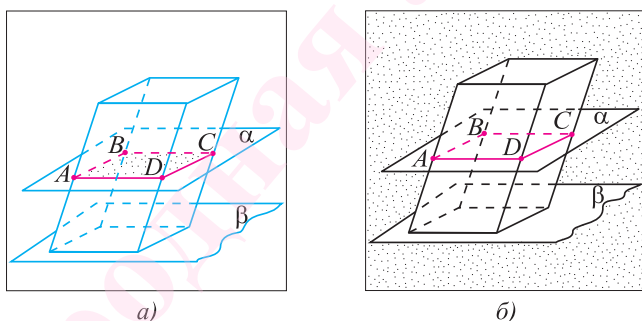


Рис. 47

Секущая плоскость пересекает грани пирамиды (параллелепипеда, призмы, куба) по отрезкам, поэтому **сечение есть многоугольник**, лежащий в секущей плоскости, сторонами которого являются указанные отрезки.

Например, на рисунке 47, а, б изображен параллелепипед и секущая плоскость α . Сечением параллелепипеда этой плоскостью служит четырехугольник $ABCD$. Плоскость β , в которой лежит одна из граней параллелепипеда, секущей плоскостью для него не является.

Для построения сечения пирамиды (призмы, параллелепипеда, куба), а точнее, его изображения можно построить

точки пересечения секущей плоскости с ребрами пирамиды (призмы, параллелепипеда, куба) и соединить каждые две из них, лежащие в одной грани.

Заметим, что последовательность построения вершин и сторон сечения не существенна, но выполнять построение необходимо с учетом аксиом и теорем стереометрии, а также правил изображения фигур. Подчеркнем, что в основе построения сечений многогранников лежит две задачи на построение: а) линии пересечения двух плоскостей; б) точки пересечения прямой и плоскости.

а) Для построения прямой, по которой пересекаются некоторые две плоскости α и β (например, секущая плоскость и плоскость грани многогранника), нужно построить две их общие точки, тогда прямая, проходящая через эти точки, есть линия пересечения плоскостей α и β .

б) Для построения точки пересечения прямой l и плоскости α нужно построить точку пересечения прямой l и прямой l_1 , по которой пересекаются плоскость α и любая плоскость, содержащая прямую l .

Задача 1. На ребрах AD , DC и CB треугольной пирамиды $DABC$ даны точки T , O и E соответственно. Точка O не является серединой ребра DC (рис. 48, а, б, в). Постройте сечение пирамиды плоскостью TOE .

Решение.

1) Проводим отрезки TO и OE (см. рис. 48, а). (Отрезки TO и OE лежат в секущей плоскости и в гранях ACD и CBD соответственно, поэтому являются сторонами искомого сечения.)

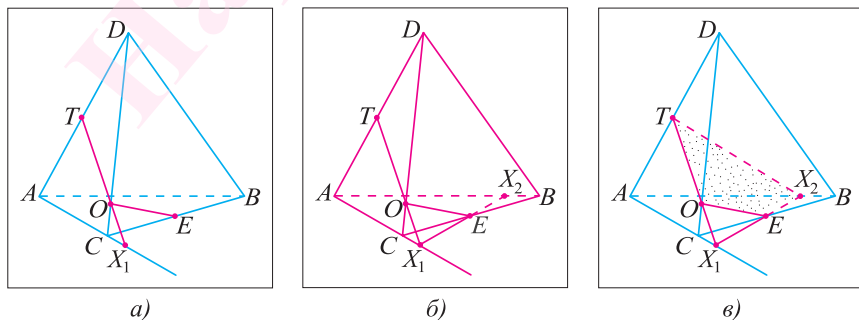


Рис. 48

2) Находим точку X_1 , в которой пересекаются прямые AC и TO : $X_1 = AC \cap TO$ (см. рис. 48, б). (Прямые AC и TO лежат в одной плоскости и не являются параллельными, следовательно, пересекаются в точке X_1 .)

3) Отметим точку X_2 пересечения прямых X_1E и AB : $X_2 = X_1E \cap AB$ (см. рис. 48, в). ($X_1 \in (ABC)$ и $X_1 \in (TOE)$, кроме того, $E \in (ABC)$ и $E \in (TOE)$). Значит, эти плоскости пересекаются по прямой X_1E . Прямые X_1E и AB лежат в одной плоскости ABC и не параллельны, следовательно, пересекаются в точке X_2 .)

4) Проводим отрезок X_2T (см. рис. 48, в). (Точка X_2 лежит в секущей плоскости TOE и на ребре AB . Следовательно, плоскость TOE пересекает грани ACB и ABD по отрезкам EX_2 и X_2T соответственно.)

Четырехугольник $TOEX_2$ — искомое сечение.

Задача 2. Точка T — середина ребра DB тетраэдра $DABC$ (рис. 49, а, б). Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки A , C и T . Вычислите радиус окружности, вписанной в это сечение, если длина ребра данного тетраэдра равна 2 см.

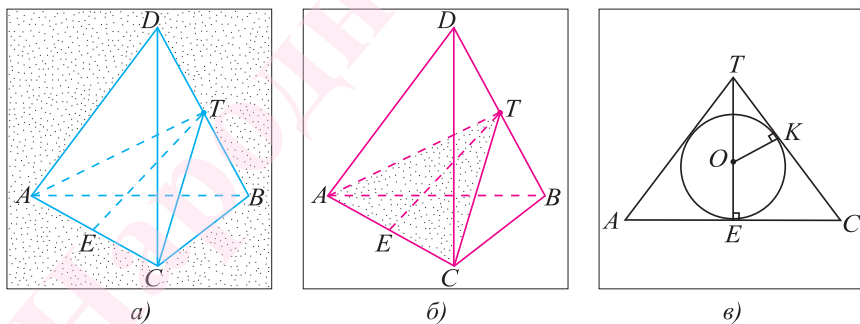


Рис. 49

Решение.

I. Построим сечение.

Точки T и C лежат в каждой из плоскостей ATC и DBC , следовательно, плоскость ATC пересекает плоскость DBC по прямой TC , а, значит, грань DBC — по отрезку TC . Аналогично получаем, что секущая плоскость ATC пересекает грань ADB по отрезку AT , а каждую из граней ADC

и ABC — по отрезку AC . Таким образом, треугольник ATC — искомое сечение данного тетраэдра $DABC$ (см. рис. 49, а, б).

II. Вычислим радиус окружности.

1) Так как треугольники ATB и CTB равны ($AB = BC = 2$ см, $\angle ATB = \angle CTB = 90^\circ$, TB — общая сторона), то $AT = TC$, т. е. треугольник ATC равнобедренный (рис. 49, в).

2) В прямоугольном треугольнике CTB ($TB = 1$ см, $BC = 2$ см, $\angle CTB = 90^\circ$) длина катета $TC = \sqrt{BC^2 - TB^2} = \sqrt{3}$ см.

3) Пусть точка E — середина отрезка AC , точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ATC , а точка K — точка касания окружности и стороны TC . В прямоугольном треугольнике TEC ($\angle TEC = 90^\circ$, так как медиана TE , проведенная к основанию, в равнобедренном треугольнике ATC является и высотой, $CE = 1$ см, $TC = \sqrt{3}$ см) длина катета $TE = \sqrt{TC^2 - CE^2} = \sqrt{2}$ см.

4) Имеем $OE = OK = r$, $OT = TE - OE = \sqrt{2} - r$, где r — радиус вписанной окружности. Треугольники TEC и TKO подобны ($\angle TEC = \angle TKO = 90^\circ$, $\angle ETC = \angle KTO$), следовательно, $OT : TC = OK : EC$ или $(\sqrt{2} - r) : \sqrt{3} = r : 1$. Отсюда найдем радиус окружности: $r = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}$.

Заметим, что радиус r можно найти, воспользовавшись формулой $r = \frac{S_{ATC}}{p_{ATC}}$, где S_{ATC} и p_{ATC} — площадь и полупериметр треугольника ATC соответственно.

Вопросы и задачи к § 4

118. Какая плоскость называется секущей плоскостью многогранника?

119. Какая фигура называется сечением многогранника?

120. Поясните, как можно построить отрезок, по которому секущая плоскость пересекает грань многогранника.

121. Что необходимо построить для того, чтобы построить прямую, по которой пересекаются две плоскости?

122. Объясните, как строится точка пересечения прямой и данной плоскости.

123. На рисунке 50, а изображен куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $T \in A_1 D_1$, $O \in CC_1$, $K \in DD_1$. Перечертите рисунок в тетрадь и постройте: а) точку пересечения прямой TK с плоскостью грани $AA_1 B_1 B$; б) сечение куба плоскостью, проходящей через точки T , K и O .

124. Изобразите куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки B_1 , T и O , где точки T и O — середины ребер AD и DC соответственно.

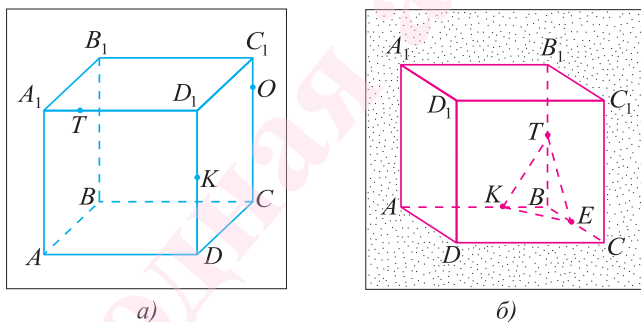


Рис. 50

125. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. Треугольник KTE — сечение куба плоскостью, проходящей через точки K , T и E — середины ребер AB , BB_1 и BC соответственно (рис. 50, б).
 а) Верно ли, что треугольник KTE равносторонний?
 б) Вычислите площадь треугольника KTE , если длина ребра куба равна 1 см.

126. Изобразите куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки A , B_1 , C , и вычислите площадь поверхности куба, если площадь построенного сечения равна $\sqrt{3}$ см².

127. На рисунке 51 изображена пирамида $DABC$, $O \in AD$, $E \in DB$, $T \in AC$. Перечертите рисунок в тетрадь и постройте: а) точку пересечения прямой OT с плоскостью DCB ; б) точку пересечения прямой OE с плоскостью ABC ; в) сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки T , E и O .

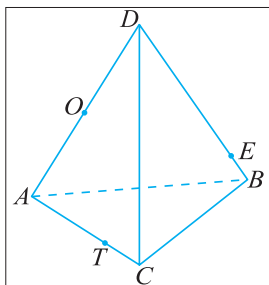


Рис. 51

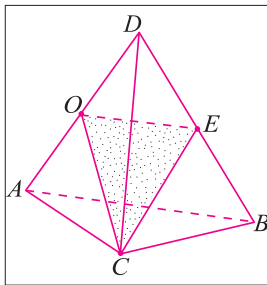


Рис. 52

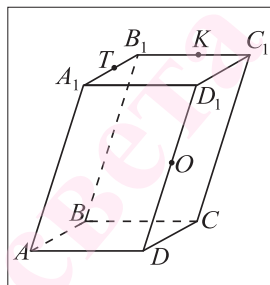


Рис. 53

128. Изобразите треугольную пирамиду $ABCD$. Постройте ее сечение плоскостью, проходящей через точки K , E и P , где точки K и E — середины ребер AD и BD , а точка P лежит на продолжении ребра BC .

129. Дан тетраэдр $DABC$. Треугольник COE — сечение тетраэдра $DABC$ плоскостью, проходящей через точки C , O и E , где точки O и E — середины ребер AD и DB соответственно (рис. 52). а) Докажите, что треугольник COE равнобедренный. б) Вычислите периметр треугольника COE , если длина ребра тетраэдра равна $2\sqrt{3}$ см.

130. Изобразите тетраэдр $ABCD$. Постройте сечение этого тетраэдра плоскостью, проходящей через середины ребер AD , AB , AC , и найдите площадь этого сечения, если длина ребра тетраэдра равна a .

131. На рисунке 53 изображен параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $T \in A_1 B_1$, $K \in B_1 C_1$, $O \in DD_1$. Перечертите рисунок в тетрадь и постройте: а) точку пересечения прямой TK с плоскостью грани $AA_1 D_1 D$; б) сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки T , K и O .

132. Изобразите параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте его сечение плоскостью, проходящей через точки T , P и O — середины ребер BB_1 , AD и DC соответственно.

133. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $AB = BC = 3$ см и $CC_1 = 4$ см. Треугольник BDC_1 — сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямую BD и вершину C_1 (рис. 54). а) Докажите, что треугольник BDC_1 равнобедренный. б) Вычислите высоту треугольника BDC_1 , проведенную к стороне DC_1 .

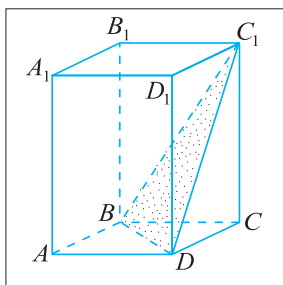


Рис. 54

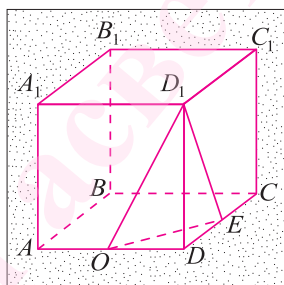


Рис. 55

134. Изобразите прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямую $A_1 C_1$ и вершину D . Найдите площадь этого сечения, если известно, что радиус окружности, описанной около прямоугольника $D_1 C_1 CD$, равен R и $A_1 D_1 = D_1 C_1 = a$.

135. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки O и E — середины ребер AD и DC соответственно. Треугольник OED_1 — сечение куба плоскостью, проходящей через точки O , E и D_1 (рис. 55). а) Является ли треугольник OED_1 равнобедренным? б) Найдите длину ребра куба, если периметр треугольника OED_1 равен P .

136. Изобразите куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через прямую AC и точку T , где точка T — середина ребра BB_1 . Вычислите длину медианы TO треугольника ATC , если $AB = 2$ см.

137. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, длина каждого ребра которой равна 2 см. Треугольник AFC — сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AC и точку F — середину ребра SB (рис. 56). Вычислите высоту FO треугольника AFC .

138. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$, все ребра которой равны между собой, точка K — середина бокового ребра SC . Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и прямую BD . Найдите площадь основания пирамиды, если площадь полученного сечения равна Q .

139. На рисунке 57 изображена четырехугольная пирамида $SABCD$, $T \in SB$, $E \in SC$, $O \in DC$. Перечертите рисунок в тетрадь и постройте: а) точку пересечения прямой TE с плоскостью основания пирамиды; б) сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки T , O и E .

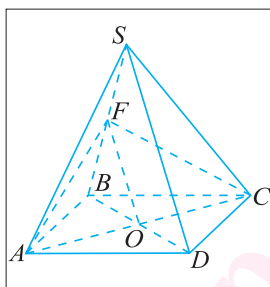


Рис. 56

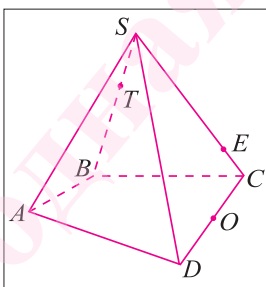


Рис. 57

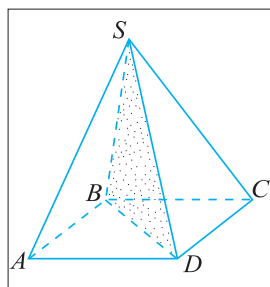


Рис. 58

140. Изобразите четырехугольную пирамиду $SABCD$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середины ребер SA , AD и DC .

141. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны между собой. Треугольник SBD — сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину S и прямую BD (рис. 58). Найдите площадь боковой грани пирамиды, если радиус окружности, описанной около треугольника SBD , равен R .

142. $TABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину T и прямую AC . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если площадь треугольника ATC равна площади основания, а длина стороны основания равна a .

143. На рисунке 59 изображен куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $K \in A_1 B_1$, $T \in B_1 C_1$, $E \in DD_1$. Перечертите рисунок в тетрадь и постройте: а) прямую, по которой пересекаются плоскость KTE и плоскость грани $DD_1 C_1 C$; б) сечение куба плоскостью, проходящей через точки K , T и E .

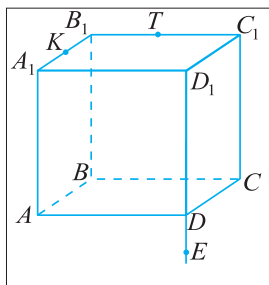


Рис. 59

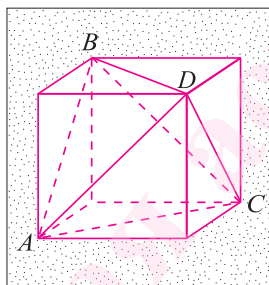


Рис. 60

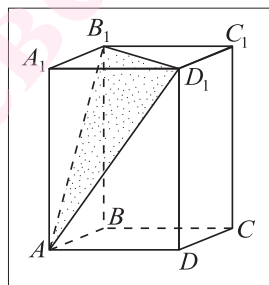


Рис. 61

144. Изобразите куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середины ребер AA_1 , AD и CC_1 .

145. На рисунке 60 изображены куб и пирамида $ABCD$. Вычислите площадь поверхности пирамиды, если длина ребра куба равна 1 см.

146. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, основание которого — квадрат, длина стороны которого a . Постройте сечение параллелепипеда плоскостью AB_1C . Найдите радиус окружности, описанной около боковой грани параллелепипеда, если площадь треугольника AB_1C равна S .

147. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, основанием которого служит квадрат $ABCD$, $AB = a$. Треугольник B_1AD_1 — сечение параллелепипеда плоскостью,

проходящей через вершину A и прямую B_1D_1 . Найдите площадь боковой грани параллелепипеда, если угол A в треугольнике B_1AD_1 равен α (рис. 61).

148. На рисунке 62 изображен параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки K , O и T лежат на прямых $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и DD_1 соответственно, как показано на рисунке. Перечертите рисунок в тетрадь и постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки T , K и O .

149. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб (рис. 63). Четырехугольник $AKTC$ — сечение куба плоскостью, проходящей через вершины A , C и точку O такую, что точка B_1 — середина отрезка OB . Докажите, что четырехугольник $AKTC$ — равнобедренная трапеция, и вычислите длину ее средней линии, если длина ребра куба равна $\sqrt{2}$ см.

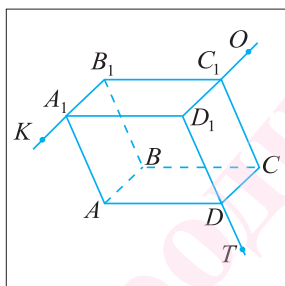


Рис. 62

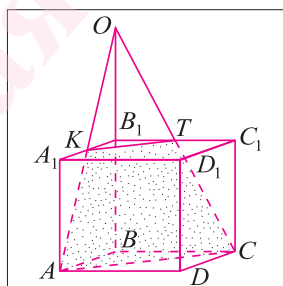


Рис. 63

150. Изобразите куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через прямую A_1D и точку K такую, что точка C_1 — середина отрезка D_1K . Вычислите периметр построенного сечения, если длина ребра куба равна 1 см.

151. Изобразите тетраэдр $ABCD$ и постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через середины ребер DA , DB и DC . Вычислите площадь грани тетраэдра, если площадь построенного сечения равна 6 см^2 .

152. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. Точка T — середина ребра BB_1 , точка K лежит на ребре AA_1 так, что $AK : KA_1 = 1 : 2$, а точка P лежит в плоскости грани $ABCD$ (рис. 64). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте: а) точку пересечения прямой TK с плоскостью грани $ABCD$; б) сечение куба плоскостью TKP .

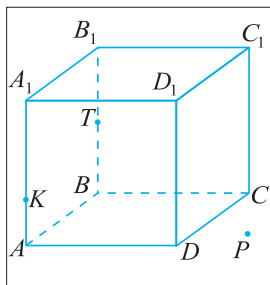


Рис. 64

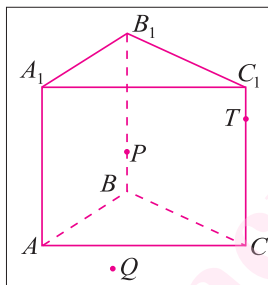


Рис. 65

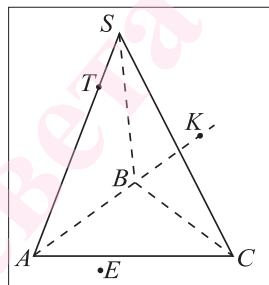


Рис. 66

153. $SABCD$ — четырехугольная пирамида. Точка T — середина ребра SA , точка K лежит на ребре SC так, что $CK : CS = 1 : 4$, а точка F лежит на продолжении диагонали BD основания так, что $BD : DF = 2 : 1$. Постройте сечение пирамиды плоскостью TKF .

154. $ABCA_1 B_1 C_1$ — треугольная призма. Точки P и T принадлежат ребрам BB_1 и CC_1 соответственно так, что $BP : PB_1 = 1 : 3$, $CT : TC_1 = 3 : 1$, а точка Q лежит в плоскости ABC (рис. 65). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте: а) точку пересечения прямой PT с плоскостью ABC ; б) сечение призмы плоскостью PTQ .

155. $SABC$ — треугольная пирамида. Точки T и F — середины ребер SA и AC соответственно, а точка K — точка пересечения медиан грани SBC . Постройте сечение пирамиды плоскостью TKF .

156. $SABC$ — треугольная пирамида. Точка T лежит на ребре SA , точка K — на продолжении ребра AB , а точка E лежит в плоскости ABC (рис. 66). Перечертите рисунок в те-

традь и постройте: а) точку пересечения прямой TK с плоскостью SBC ; б) сечение пирамиды плоскостью TKE .

157. $SABCD$ — четырехугольная пирамида. Точка T — середина ребра SB , а точки K и E лежат на продолжении ребра BC и SD соответственно так, что $BC : CK = 3 : 1$, $SD : DE = 3 : 1$. Постройте сечение пирамиды плоскостью TEK .

158. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, длина стороны основания которой равна 8 см, а бокового ребра — 6 см. Вычислите площадь сечения, проходящего через сторону одного основания и противоположащую вершину другого основания.

159. В тетраэдре $DABC$ точка O — середина ребра BC . Площадь сечения, проходящего через точки A , D и O , равна S . Найдите площадь поверхности данного тетраэдра.

160. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, все ребра которой равны между собой. Найдите площадь сечения призмы плоскостью AB_1C_1 , если площадь поверхности призмы равна S .

161. Найдите площадь поверхности правильной треугольной призмы, длина стороны основания которой равна a , а плоскость, проходящая через сторону одного основания и противоположащую вершину другого основания, делит площадь поверхности призмы в отношении $2 : 3$.

162. Квадрат $ABCD$ — основание прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если длина его бокового ребра равна a , а площадь сечения плоскостью $BA_1 C_1$ равна S .

163. В правильной четырехугольной пирамиде $TABCD$ площадь сечения пирамиды плоскостью TAC равна S . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если все ребра пирамиды равны между собой.

164. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, произведение длин диагоналей которого равно 48 см^2 ,

а радиус вписанной в него окружности равен $\frac{12}{5}$ см. Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда, если длина диагонали боковой грани равна 13 см.

165. В правильной треугольной пирамиде длина стороны основания равна a , а длина бокового ребра — b . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через две вершины основания и середину бокового ребра.

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ



Глава 2

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

§ 1. Параллельные прямые в пространстве

Определение. Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Если прямые a и b (AB и CD) параллельны, то пишут $a \parallel b$ ($AB \parallel CD$). Например, если $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ есть параллелепипед (рис. 67, а, б), то прямые AB и CD , BB_1 и CC_1 параллельны.

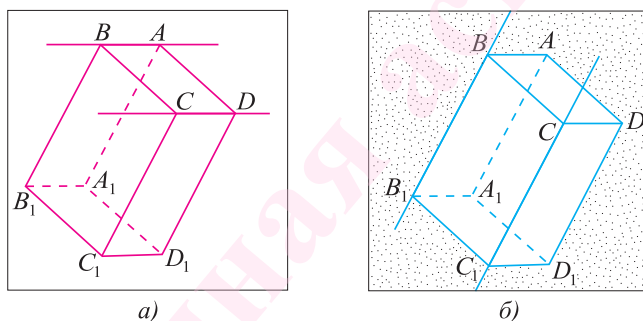


Рис. 67

Два отрезка (луча) называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых. Отрезок (луч) называется параллельным данной прямой, если он лежит на прямой, параллельной данной.

Теорема 1. Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой.

Доказательство.

1. Докажем существование прямой.

Пусть дана прямая b и точка A , не лежащая на этой прямой. Тогда через них проходит единственная плоскость α (рис. 68, а, б). В этой плоскости, как известно из планиметрии, существует прямая l , проходящая через точку A и параллельная прямой b .

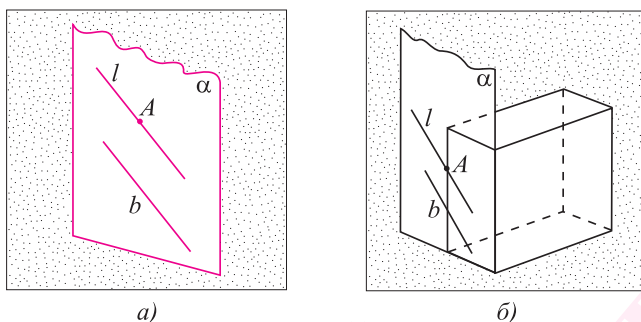


Рис. 68

2. Докажем единственность прямой.

Предположим, что существует еще одна прямая l_1 , проходящая через точку A и параллельная прямой b . Тогда прямая l_1 должна лежать в одной плоскости с точкой A и прямой b , т. е. в плоскости α . Из курса планиметрии известно, что в плоскости α через точку A проходит единственная прямая, параллельная прямой b . Значит, прямая l_1 совпадает с прямой l .

Теорема доказана.

Теорема 2. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

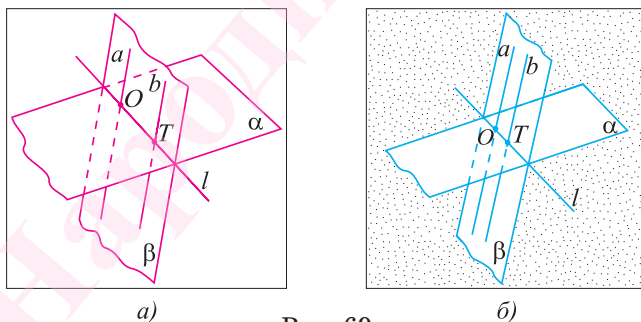


Рис. 69

Доказательство.

Пусть a и b — параллельные прямые и прямая a пересекает плоскость α в точке O . Докажем, что прямая b также пересекает плоскость α (рис. 69, а, б).

Рассмотрим плоскость β , в которой лежат параллельные прямые a и b . Плоскости α и β имеют общую точку O , следовательно, они пересекаются по некоторой прямой l .

Прямая l лежит в плоскости β и пересекает прямую a в точке O , значит, она пересекает и прямую b , параллельную прямой a , в некоторой точке T . Так как прямая l лежит в плоскости α , то точка T есть общая точка прямой b и плоскости α .

Прямая b не имеет с плоскостью α других точек, кроме точки T . Действительно, если бы прямая b имела еще одну общую точку с плоскостью α , то она лежала бы в плоскости α , а следовательно, была бы общей прямой плоскостей α и β , т. е. совпадала бы с прямой l , что противоречит параллельности прямых a и b .

Таким образом, прямая b имеет с плоскостью α единственную общую точку T , т. е. пересекается с плоскостью α в точке T .

Теорема доказана.

Теорема 3 (признак параллельности прямых). *Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.*

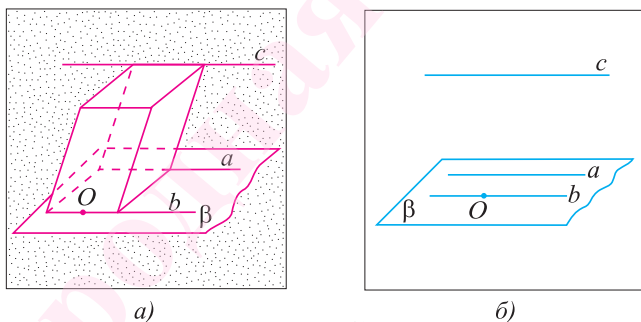


Рис. 70

Доказательство.

Пусть $a \parallel c$, $b \parallel c$ (рис. 70 а, б). Докажем, что $a \parallel b$. Для этого необходимо доказать, что прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Пусть O — некоторая точка на прямой b . Обозначим буквой β плоскость, проходящую через прямую a и точку O . Докажем, что прямая b лежит в плоскости β . Допустим, что прямая b пересекает плоскость β , тогда по теореме 2 прямая c также пересекает плоскость β . Так как $c \parallel a$, то и прямая a по теореме 2 пересекает плоскость β , а это противоречит тому, что прямая a лежит в плоскости β .

Прямые a и b не пересекаются, так как в противном случае через точку их пересечения проходили бы две прямые a и b , параллельные прямой c , что противоречит теореме 1.

Теорема доказана.

Например, пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед (рис. 71, а). Тогда прямые AD и $B_1 C_1$ параллельны. Действительно, так как четырехугольник $AA_1 D_1 D$ — параллелограмм, то $AD \parallel A_1 D_1$. Аналогично $A_1 D_1 \parallel B_1 C_1$, так как $A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелограмм. Тогда по признаку параллельности прямых $AD \parallel B_1 C_1$.

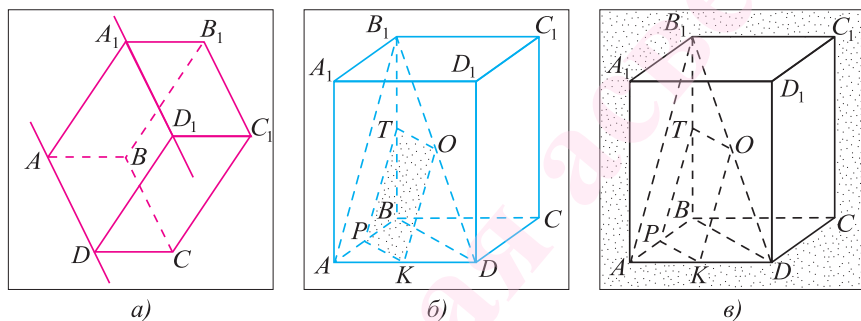


Рис. 71

Задача. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит квадрат, длина стороны которого 1 см, а длина бокового ребра параллелепипеда равна 3 см. Точки P , T , O и K являются серединами отрезков AB , BB_1 , $B_1 D_1$ и AD соответственно. Вычислите периметр четырехугольника $PТОК$ (рис. 71, б, в).

Решение.

1) В треугольнике $B_1 BD$ отрезок TO есть средняя линия, следовательно, $TO \parallel BD$, $TO = \frac{1}{2} BD$.

2) В треугольнике ABD отрезок PK — средняя линия, значит, $PK \parallel BD$, $PK = \frac{1}{2} BD$.

3) Из 1) и 2) следует, что $PK \parallel TO$, $PK = TO$, т. е. $PТОК$ — параллелограмм.

4) Теперь вычислим периметр четырехугольника: $P_{PТОК} = 2PT + 2PK = AB_1 + BD$, $AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{10}$ (см), $BD =$

$= \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2}$ (см). Таким образом, $P_{\text{СТОК}} = \sqrt{10} + \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{5} + 1)$ (см).

Ответ: $\sqrt{2}(\sqrt{5} + 1)$ см.

Теорема 4 (о точке пересечения диагоналей параллелепипеда). *Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.*

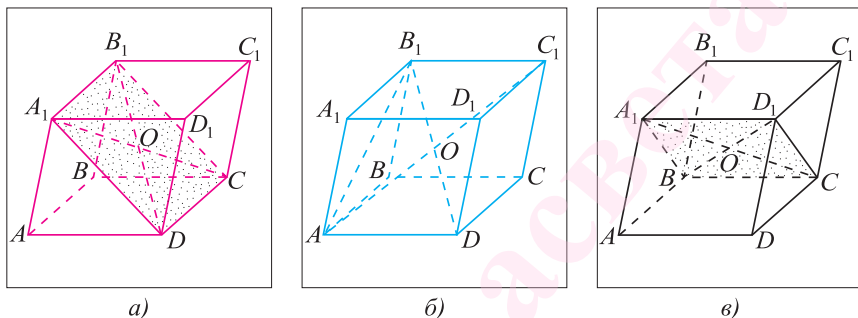


Рис. 72

Доказательство.

1) Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Рассмотрим четырехугольник $A_1 B_1 C D$, диагонали которого $A_1 C$ и $B_1 D$ являются диагоналями данного параллелепипеда (рис. 72, а). Так как $AA_1 B_1 B$ — параллелограмм, то $AB = A_1 B_1$, $AB \parallel A_1 B_1$; так как четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, то $AB = CD$, $AB \parallel CD$. Следовательно, $A_1 B_1 = CD$, $A_1 B_1 \parallel CD$, т. е. четырехугольник $A_1 B_1 C D$ — параллелограмм. Поэтому его диагонали $A_1 C$ и $B_1 D$ пересекаются в некоторой точке O и этой точкой делятся пополам.

2) Рассмотрим четырехугольник $B_1 C_1 D A$. Он также является параллелограммом, так как $B_1 C_1 = AD$ и $B_1 C_1 \parallel AD$. Следовательно, его диагонали $B_1 D$ и $C_1 A$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Серединой диагонали $B_1 D$ является точка O , значит, диагонали $A_1 C$, $B_1 D$ и $C_1 A$ параллелепипеда пересекаются в точке O и делятся ею пополам (рис. 72, б).

3) Теперь рассмотрим четырехугольник $A_1 D_1 C B$. Этот четырехугольник является параллелограммом, так как $BC = A_1 D_1$, $BC \parallel A_1 D_1$. Значит, его диагонали $A_1 C$ и $D_1 B$, ко-

торые являются диагоналями параллелепипеда, пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Серединой диагонали A_1C является точка O , следовательно, и диагональ D_1B параллелепипеда проходит через точку O и делится этой точкой пополам (рис. 72, в).

Вопросы и задачи к § 1

166. Верно ли утверждение, что прямые в пространстве параллельны, если они не пересекаются?

167. Верно ли утверждение, что параллельные прямые в пространстве лежат в одной плоскости?

168. Верно ли, что через точку, не лежащую на прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой?

169. Одна из параллельных прямых пересекает плоскость α . Как расположена вторая прямая относительно плоскости α ?

170. Верно ли утверждение, что в пространстве прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую из них?

171. Две прямые a и b параллельны третьей прямой. Что можно сказать о взаимном расположении прямых a и b ?

172. Прямые a и b в пространстве параллельны между собой, а прямая c не пересекает прямую a . Верно ли утверждение, что прямые b и c параллельны?

173. Каким свойством обладает точка пересечения диагоналей параллелепипеда?

174. На рисунке 73 изображена треугольная пирамида $SABC$. Точки P и K — середины ребер SA и SB соответственно. Отрезок TE — средняя линия треугольника CPK . а) Поясните, почему прямые PK и AB параллельны. б) Верно ли, что прямые TE и AB параллельны?

175. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, точки O и E — точки пересечения диагоналей его граней $A_1 B_1 C_1 D_1$ и $AA_1 D_1 D$ соответственно. Докажите, что прямые OE и TK параллельны, точки T и K — середины ребер CC_1 и CD соответственно.

176. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, длина каждого ребра которой равна 1 см. Диагонали граней AA_1C_1C и CC_1B_1B пересекаются в точках P и E соответственно (рис. 74). а) Верно ли, что $PE \parallel AB$? б) Вычислите периметр четырехугольника PA_1B_1E .

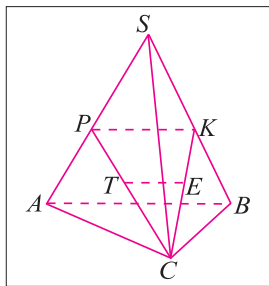


Рис. 73

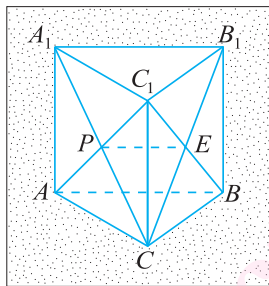


Рис. 74

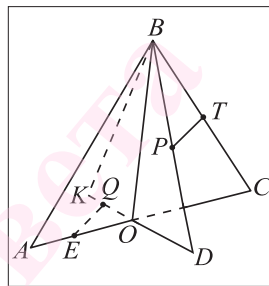


Рис. 75

177. Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ имеют общую среднюю линию FT , $F = AB \cap A_1B_1$, $T = BC \cap B_1C_1$. Пересекаются ли прямые AC и A_1C_1 ?

178. На рисунке 75 изображены два треугольника ABC и KBD , имеющие общую медиану BO . Точки T и P — середины отрезков BC и BD соответственно, а точки Q и E — середины отрезков OK и OA соответственно. а) Докажите, что прямая PT параллельна прямой DC . б) Верно ли, что прямые TP и QE параллельны?

179. Два параллелограмма $ABCD$ и $ABTE$ не лежат в одной плоскости. Докажите, что четырехугольник $CDTE$ — параллелограмм.

180. $DABC$ — треугольная пирамида (рис. 76). Точки T , P , Q и E — середины ребер AD , BD , CB и CA соответственно. а) Докажите, что четырехугольник $TPQE$ — параллелограмм. б) Вычислите периметр четырехугольника $TPQE$, если $CD = 6$ см, $AB = 7$ см.

181. $ABCD$ — трапеция ($BC \parallel DA$). Вершины A и B трапеции лежат в плоскости α , а две другие вершины не принадлежат плоскости α . Вычислите расстояние от точки A до точки пересечения прямой CD с плоскостью α , если $AD = 16$ см, $AB = 9$ см, $BC = 12$ см.

182. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Точка O лежит на продолжении ребра DC (рис. 77). Вычислите расстояние от точки D до точки пересечения прямой $C_1 O$ с плоскостью $A_1 A D$, если $CC_1 = 8$ см, $BC = 4$ см, $OC = 6$ см.

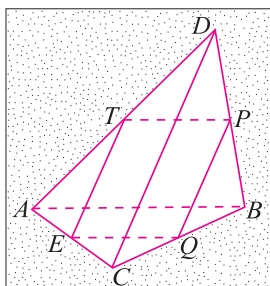


Рис. 76

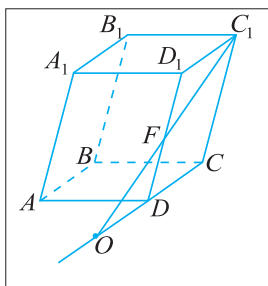


Рис. 77

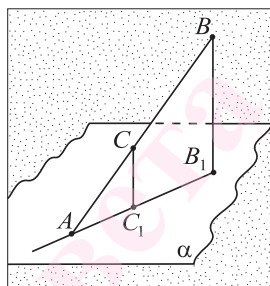


Рис. 78

183. Плоскость α и отрезок AB имеют одну общую точку A . Через точку B и середину C отрезка AB проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α в точках B_1 и C_1 соответственно. Вычислите длину отрезка BB_1 , если $CC_1 = 10$ см.

184. Через конец A отрезка AB проходит плоскость α . Через точку B и точку C этого отрезка проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках B_1 и C_1 соответственно. Вычислите длину отрезка CC_1 , если $BB_1 = 8$ см и $AC : CB = 3 : 5$ (рис. 78).

185. Отрезок AB не пересекает плоскость α . Точка C принадлежит отрезку AB . Через точки A, B, C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой, и вычислите длину отрезка CC_1 , если $AA_1 = 9$ см, $BB_1 = 5$ см, $AC : BC = 1 : 3$.

186. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. Точка O лежит на ребре AA_1 (рис. 79, а, б). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте точку пересечения прямой l , которая проходит через точку O и параллельна прямой $B_1 C$, с плоскостью $D_1 C_1 C$.

187. $SABC$ — треугольная пирамида. Точка O лежит на ребре SA так, что $SO : OA = 2 : 5$. Через точку O проведена

прямая l , параллельная медиане SK грани SBC . Вычислите длину медианы SK , если длина отрезка прямой l , расположенного внутри пирамиды, равна 7 см.

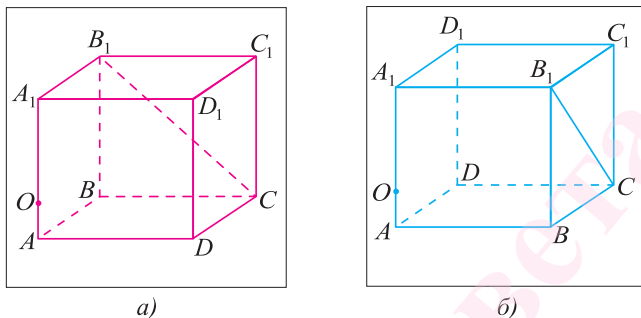


Рис. 79

188. Плоскость α проходит через вершины B и C треугольника ABC , а вершина A не лежит в плоскости α . Прямая a параллельна прямой AC и пересекает сторону AB в точке F так, что $AF:FB = 2:3$. а) Докажите, что прямая a пересекает плоскость α . б) Вычислите расстояние от точки F до точки пересечения прямой a с плоскостью α , если $AC = 3$ см.

189. В тетраэдре $SABC$ точка P лежит на ребре AB так, что $AP:PB = 1:3$. Прямая a проходит через точку P , параллельна медиане AE боковой грани SAC и пересекает поверхность тетраэдра в точке T . Вычислите длину ребра тетраэдра, если $PT = 4$ см.

190. $SABCD$ — тетраэдр. Через точку пересечения медиан грани ABC проведена прямая l , параллельная прямой AS . Найдите площадь треугольника BKS (точка K — середина ребра AS), если длина отрезка прямой l , расположенного внутри тетраэдра, равна a .

191. Параллелограмм $ABCD$ и треугольник BTC не лежат в одной плоскости. Прямая a проходит через точку O , лежащую на прямой TC , и параллельна прямой BC . Докажите, что прямые AD и a параллельны.

192. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. Точка O лежит на прямой SD . Прямая l проходит через точ-

ку O и параллельна прямой DC . Докажите, что прямые AB и a параллельны.

193. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. Точка P лежит: а) на ребре BB_1 (рис. 80, а); б) на ребре $B_1 C_1$ (рис. 80, б). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте точку пересечения прямой l , проходящей через точку P и параллельной прямой $B_1 D$, с поверхностью куба.

194. $SABC$ — тетраэдр, длина ребра которого a . Точка O — середина ребра SB . Постройте точку пересечения прямой l , проходящей через точку O и параллельной медиане BT грани ABC , с поверхностью тетраэдра. Найдите длину отрезка этой прямой, расположенного внутри тетраэдра.

195. $ABCA_1 B_1 C_1$ — правильная треугольная призма, все ребра которой равны между собой. Точка O — середина диагонали AC_1 грани $AA_1 C_1 C$. Постройте точку пересечения прямой l , проходящей через точку O и параллельной медиане $C_1 K$ грани $A_1 B_1 C_1$, с гранью $AA_1 B_1 B$. Вычислите площадь боковой поверхности призмы, если длина отрезка прямой l , расположенного внутри призмы, равна 1 см (рис. 81).

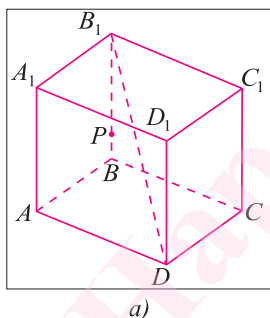
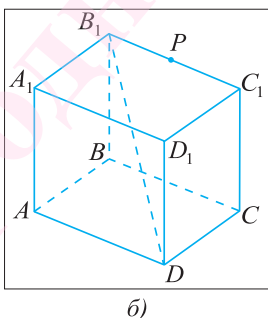


Рис. 80



б)

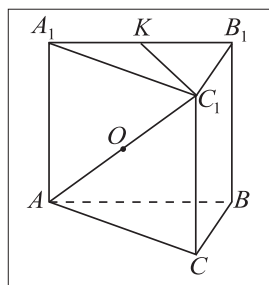


Рис. 81

196. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ все ребра равны между собой. Точка O — точка пересечения медиан грани ABC . Найдите длину расположенного внутри призмы отрезка прямой, проходящей через середину отрезка $A_1 O$ и параллельной прямой CO , если площадь ее боковой поверхности равна S .

197. $TABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой в два раза больше стороны основания, а площадь боковой поверхности равна S . Найдите длину расположенного внутри пирамиды отрезка прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей основания и параллельной медиане TF грани TDC .

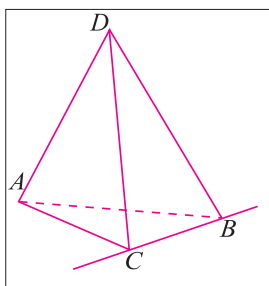
198. В правильной четырехугольной пирамиде $TABCD$ все ребра равны между собой. Точка E — середина ребра TA . Через точку E проведена прямая l , параллельная прямой KP , где K и P — середины ребер TD и TC соответственно. Постройте точку F — точку пересечения прямой l с плоскостью TBC . Найдите площадь основания пирамиды, если площадь четырехугольника $EFCD$ равна S .

199. $SABCD$ — треугольная пирамида. Через точку пересечения медиан грани SBD проведена прямая, параллельная медиане BM грани SAB . Найдите длину отрезка этой прямой, лежащего внутри пирамиды, если $BM = a$.

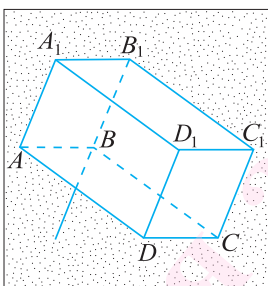
§ 2. Параллельность прямой и плоскости

1. Параллельность прямой и плоскости. Возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости:

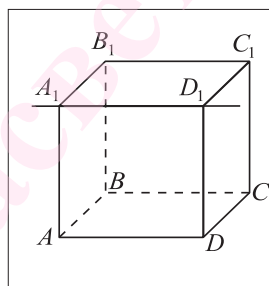
1) прямая лежит в плоскости (каждая точка прямой лежит в плоскости). Например, если $DABC$ — треугольная пирамида, то прямая CB лежит в плоскости ABC (рис. 82, а);



а)



б)



в)

Рис. 82

2) прямая и плоскость пересекаются (имеют единственную общую точку). Например, прямая B_1B пересекается с плоскостью грани $ABCD$ параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 82, б);

3) прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки. Например, если $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, то прямая $A_1 D_1$ и плоскость, в которой лежит грань $ABCD$, не пересекаются (рис. 82, в).

Определение. Прямая и плоскость называются **параллельными**, если они не имеют общих точек.

Если прямая a параллельна плоскости α , то пишут $a \parallel \alpha$. Читают: «Прямая a параллельна плоскости α ».

Отрезок (луч) называется параллельным плоскости, если он лежит на прямой, параллельной данной плоскости.

Наглядное представление о прямой, параллельной плоскости, дает линия пересечения стены и потолка в комнате. Эта линия параллельна плоскости пола.

2. Признак параллельности прямой и плоскости. Докажем признак параллельности прямой и плоскости.

Теорема 1 (*признак параллельности прямой и плоскости*). *Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.*

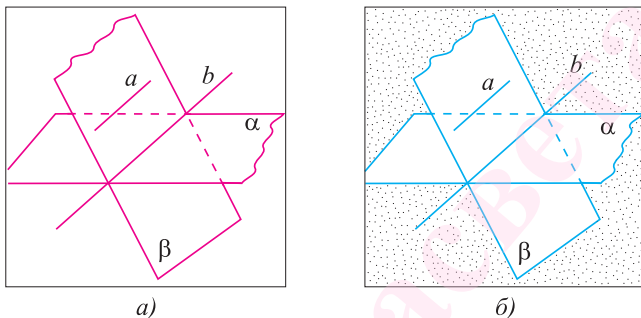


Рис. 83

Доказательство.

Пусть прямая a не лежит в плоскости α , а прямая b лежит в этой плоскости и $a \parallel b$. Докажем, что прямая a параллельна плоскости α (рис. 83, а, б).

Предположим, что прямая a пересекает плоскость в некоторой точке X . Точка X лежит в плоскости α и в плоскости β , проходящей через параллельные прямые a и b . Следовательно, она лежит на прямой b , по которой пересекаются плоскости α и β , что противоречит условию теоремы ($a \parallel b$).

Таким образом, предположение неверно и прямая a не пересекает плоскость α . По условию она не лежит в плоскости α , значит, $a \parallel \alpha$.

Теорема доказана.

Например, на рисунке 84, а, б ($ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед) прямая $A_1 B_1$ параллельна плоскости α , в которой лежит грань $ABCD$. Действительно, прямая $A_1 B_1$ параллельна прямой AB , лежащей в плоскости α . Следовательно, по признаку параллельности прямой и плоскости $A_1 B_1 \parallel \alpha$.

Теорема 2. *Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.*

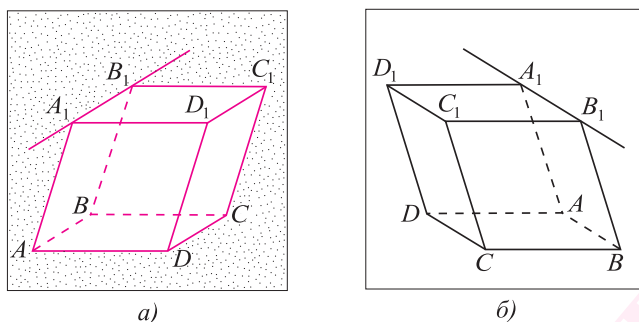


Рис. 84

Доказательство.

Пусть плоскость α проходит через прямую a , параллельную плоскости β , а плоскости α и β пересекаются по прямой b . Докажем, что $a \parallel b$. Прямые a и b лежат в одной плоскости α . Кроме того, они не пересекаются. Действительно, если бы прямые a и b пересекались в некоторой точке X , тогда бы прямая a пересекала плоскость β в точке X , что противоречит условию. Таким образом, прямые a и b параллельны (рис. 85, а, б).

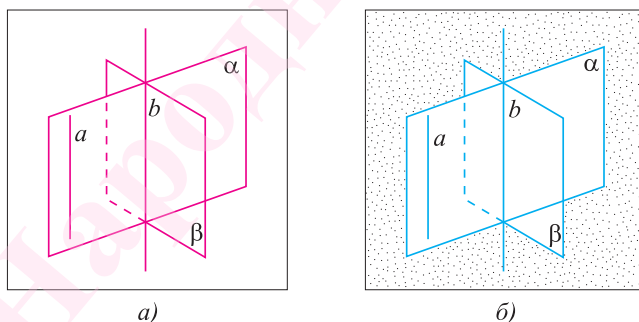


Рис. 85

Проиллюстрируем возможность применения теоремы при решении задач.

Задача 1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте сечение куба плоскостью α , проходящей через прямую AA_1 и точку T , которая принадлежит ребру BC .

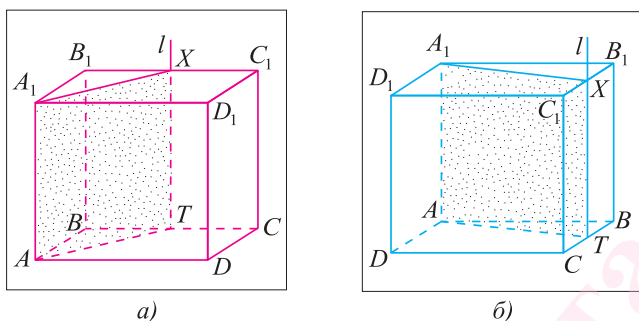


Рис. 86

Решение.

1) Плоскость α пересекает грань $ABCD$ по отрезку AT (рис. 86, а, б).

2) Прямая AA_1 параллельна прямой BB_1 , лежащей в плоскости грани BCC_1B_1 , следовательно, плоскость α пересекает плоскость грани BCC_1B_1 по прямой l , параллельной прямой BB_1 . Отметим точку $X = l \cap B_1C_1$.

3) Плоскость α пересекает грани BCC_1B_1 и $C_1B_1A_1D_1$ по отрезкам XT и XA_1 соответственно. Четырехугольник TXA_1A — искомое сечение.

Задача 2. Прямая a параллельна плоскости α . Точка O лежит в плоскости α . Докажите, что прямая, проходящая через точку O и параллельная прямой a , лежит в плоскости α .

Доказательство.

Пусть прямая b проходит через точку O и параллельна прямой a . Предположим, что прямая b не лежит в плоскости α , т. е. пересекает плоскость α в точке O . Тогда прямая a также пересекает плоскость α (гл. 2, § 1, теорема 4), что противоречит условию. Следовательно, прямая b лежит в плоскости α .

Задача 3. Постройте сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , проходящей через прямую B_1C и точку O , лежащую на ребре AA_1 .

Решение.

1) Плоскость α пересекает грани AA_1B_1B и BB_1C_1C по отрезкам OB_1 и B_1C соответственно (рис. 87, а).

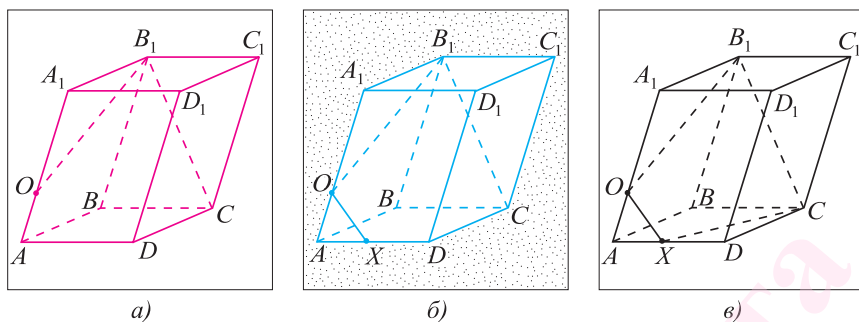


Рис. 87

2) Четырехугольник A_1B_1CD является параллелограммом (т. к. $A_1B_1 \parallel DC$, $A_1B_1 = DC$), следовательно, $B_1C \parallel A_1D$. По признаку параллельности прямой и плоскости прямая B_1C параллельна плоскости, в которой лежит грань AA_1D_1D .

3) Секущая плоскость α пересекает плоскость грани AA_1D_1D по прямой l , проходящей через точку O и параллельной прямой B_1C . Отметим точку $X = l \cap AD$ ($O \in l$, $l \parallel A_1D$) (рис. 87, б).

4) Плоскость α пересекает грани AA_1D_1D и $ABCD$ по отрезкам XO и XC (рис. 87, в). Четырехугольник OB_1CX — искомое сечение.

Вопросы и задачи к § 2

200. Верно ли утверждение, что прямая, параллельная некоторой прямой, лежащей в плоскости, параллельна этой плоскости?

201. Верно ли утверждение, что прямая, параллельная плоскости, параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости?

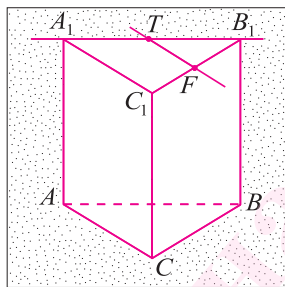
202. Верно ли утверждение, что две прямые, каждая из которых параллельна некоторой плоскости, параллельны между собой?

203. Прямая a параллельна плоскости β . Верно ли, что прямая a не пересекает любую прямую плоскости β ?

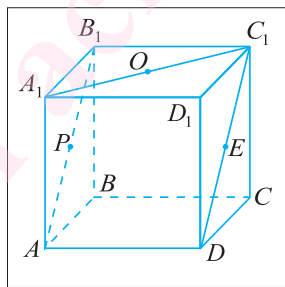
204. Прямая l параллельна плоскости α . Верно ли утверждение, что в плоскости α существует прямая, параллельная прямой l ?

205. Можно ли две пересекающиеся плоскости пересечь третьей плоскостью по двум параллельным прямым?

206. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, точки T и F — середины ребер A_1B_1 и C_1B_1 соответственно (рис. 88, а).
 а) Верно ли, что прямая A_1B_1 параллельна плоскости ABC ?
 б) Докажите, что прямая TF параллельна плоскости ABC .
 в) Назовите какую-либо плоскость, которой параллельна прямая CC_1 .



а)



б)

Рис. 88

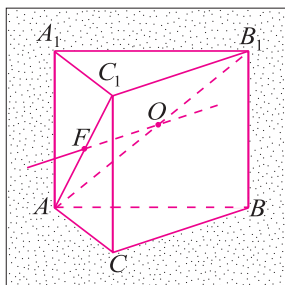
207. $DABC$ — треугольная пирамида, точка F — середина ребра DB . Каким образом должна быть расположена на ребре CB точка T , чтобы прямая FT была параллельна плоскости DCA ?

208. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. Точки P , O и E — середины отрезков AB_1 , $A_1 C_1$ и $C_1 D$ соответственно (рис. 88, б). а) Верно ли, что прямая PO параллельна плоскости, в которой лежит грань $AA_1 D_1 D$? б) Докажите, что прямая OE параллельна плоскости $B_1 BC$.

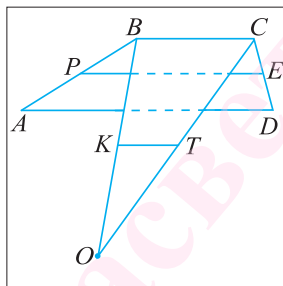
209. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки O и E — середины отрезков AB_1 и AC соответственно.
 а) Докажите, что отрезок OE параллелен плоскости, в которой

лежит грань BCC_1B_1 . б) Вычислите длину отрезка OE , если $AD = 3$ см, $DD_1 = 4$ см.

- 210.** $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, точки O и F — середины отрезков AB_1 и AC_1 соответственно (рис. 89, а). а) Верно ли, что прямая FO параллельна плоскости $A_1B_1C_1$? б) Докажите, что прямая FO параллельна плоскости ABC .



а)



б)

Рис. 89

- 211.** $ABCD$ — трапеция. Плоскость α проходит через вершины A, D и не проходит через вершину C . Точка O лежит в плоскости α (рис. 89, б). а) Докажите, что средняя линия PE трапеции параллельна плоскости α . б) Верно ли, что средняя линия KT треугольника BOC параллельна плоскости α ?

- 212.** Точка O не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямая CD параллельна плоскости AOB .

- 213.** Четырехугольник B_1COX — сечение параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α , проходящей через прямую B_1C и точку $O \in AD$ (рис. 90). а) Верно ли, что прямая B_1C параллельна плоскости XOT ? б) Докажите, что средняя линия PE треугольника XOT параллельна плоскости α .

- 214.** $SABC$ — правильная треугольная пирамида, длина бокового ребра которой равна 4 см, а основание есть треугольник, длина стороны которого равна 2 см. Вычислите периметр сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра BC и среднюю линию треугольника SAB , которая параллельна прямой AB .

215. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. Вычислите площадь полной поверхности куба, если периметр треугольника TOE равен $(2 + \sqrt{2})$ см, где точки T , O и E — середины отрезков AA_1 , $A_1 B$ и $A_1 D$ соответственно (рис. 91).

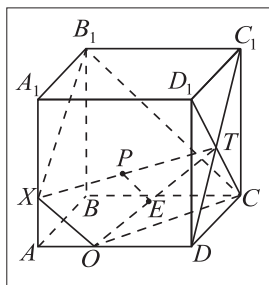


Рис. 90

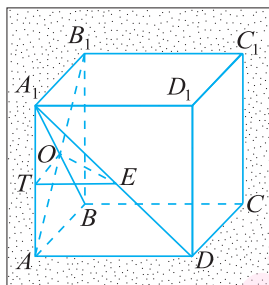


Рис. 91

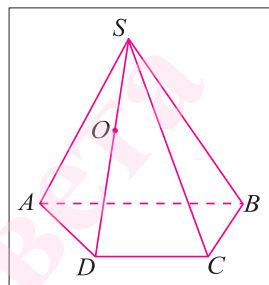


Рис. 92

216. Точка O не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$, а точка E — середина отрезка BO . Докажите, что плоскость AED пересекает прямую OC .

217. На рисунке 92 изображена четырехугольная пирамида, основание которой — трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку $O \in SD$ и прямую AB . Какая фигура получится в сечении?

218. Длина стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равна 20 см, а длина бокового ребра — 26 см. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середины двух противоположных сторон основания и параллельной какому-либо боковому ребру. Вычислите площадь сечения.

219. На рисунке 93 изображена правильная треугольная пирамида $SABC$. Четырехугольник $DOKT$ — сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середины ребер AS , AC и параллельной прямой, на которой лежит медиана AF грани ABC . Вычислите длины отрезков OD и KT , если $SB = 12$ см.

220. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, длина каждого ребра которой равна a . Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину S , середину ребра CD и параллельной диагонали AC основания. Найдите площадь этого сечения.

221. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, каждое ребро которой равно a . Точки P и Q — середины ребер AA_1 и BC соответственно (рис. 94). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки P , Q и параллельной прямой AC . Найдите периметр этого сечения.

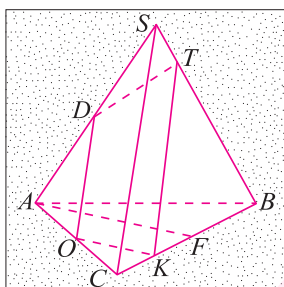


Рис. 93

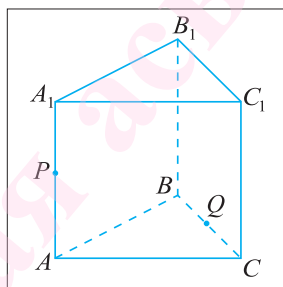


Рис. 94

222. $SABCD$ — четырехугольная пирамида, основанием которой служит трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Точка O — середина ребра SA . Вычислите длину отрезка, по которому плоскость OBC пересекает грань SAD , если $BC = 6$ см, а длина средней линии трапеции равна 8 см.

223. $DABC$ — тетраэдр. Точки T , K и E — середины ребер DB , DC и AC соответственно. Вычислите периметр сечения тетраэдра плоскостью TKE , если площадь грани тетраэдра равна $16\sqrt{3}$ см².

224. В треугольной пирамиде $ABCD$ точки O , K и T — середины ребер DB , DC и AC соответственно. Постройте точку P , в которой плоскость OKT пересекает ребро AB . Докажите, что отрезки KP и OT пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

225. $SABCD$ — четырехугольная пирамида, основание которой — параллелограмм. Точки T , K и E — середины ребер AB , AD и SC соответственно. Постройте отрезок, по которому плоскость TKE пересекает диагональное сечение SBD пирамиды.

226. Основание четырехугольной пирамиды $SABCD$ — трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Точка E — середина ребра SD . Постройте точку T , в которой плоскость BCE пересекает прямую SA . Докажите, что отрезки TC и BE пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, если средняя линия трапеции $ABCD$ равна $\frac{3}{2} BC$.

227. Основание пирамиды $SABCD$ — трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Точки K и E — середины диагоналей AC и BD основания, а точка O — середина ребра SB . Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки O , K и E . Какая фигура получается в сечении?

228. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка O — центр основания ABC , а точка D делит ребро SC на отрезки $SD = \frac{5}{3}$ см и $DC = \frac{10}{3}$ см. Докажите, что прямая OD параллельна плоскости ASB , и вычислите длину отрезка OD , если $AB = 6$ см.

229. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. Точка F — середина ребра AD , а точка K лежит на диагонали куба $B_1 D$ так, что $B_1 K : B_1 D = 1 : 3$. Докажите, что прямая OK параллельна плоскости грани $AA_1 B_1 B$, где точка O — точка пересечения отрезков AC и BF (рис. 95).

230. Через вершину прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость α параллельно гипотенузе AB . Биссектриса угла A пересекает плоскость α в точке O . Вычислите длину отрезка CO , если $AB = 5$ см, $BC = 4$ см.

231. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, точки E , T и K — середины ребер AD , SB и SC соответственно (рис. 96). Верно ли, что отрезки ET и DK равны и параллельны? Дайте обоснование ответа.

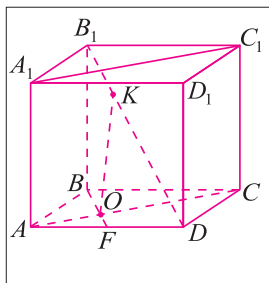


Рис. 95

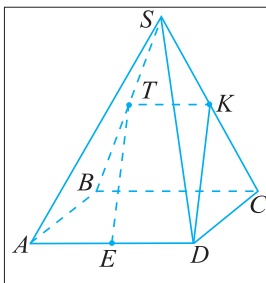


Рис. 96

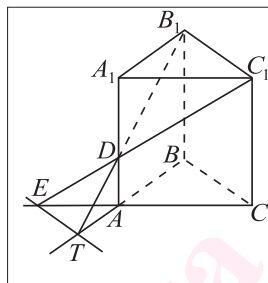


Рис. 97

232. $ABCA_1B_1C_1D_1$ — куб, точки T , K и E — середины отрезков B_1B , B_1A и B_1D соответственно. Вычислите площадь сечения пирамиды B_1ABCD плоскостью TKE , если площадь поверхности куба равна 24 см^2 .

233. Постройте сечение тетраэдра $SABC$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB , SC и параллельной ребру SB . Найдите периметр сечения, если длина ребра тетраэдра равна a .

234. В правильной треугольной призме $ABC_1B_1C_1$ через вершины B_1 , C_1 и точку D на ребре AA_1 ($AD : DA_1 = 2 : 3$) проведены прямые, пересекающие плоскость основания в точках T и E (рис. 97). Вычислите длину отрезка TE , если $AB = 9 \text{ см}$.

235. В тетраэдре $SABC$ точки T и K — середины ребер AB и SB . Вычислите длину отрезка, по которому пересекаются сечения тетраэдра плоскостями, проходящими через прямые ST и BK и параллельными прямой AC , если $AB = 12 \text{ см}$.

236. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точки E и D — середины ребер SA и SB соответственно. Через середину O отрезка CE проведена прямая, параллельная прямой AD и пересекающая поверхность пирамиды в точке T . Постройте точку T и вычислите длину отрезка OT , если $CE = 8 \text{ см}$.

§ 3. Скрещивающиеся прямые

1. Скрещивающиеся прямые. Если две различные прямые лежат в одной плоскости, то они либо пересекаются, либо параллельны. В пространстве возможен и третий случай, когда не существует плоскости, в которой лежат две прямые.

Например, если $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма (рис. 98, а, б), то прямые AA_1 и CB не параллельны и не пересекаются.

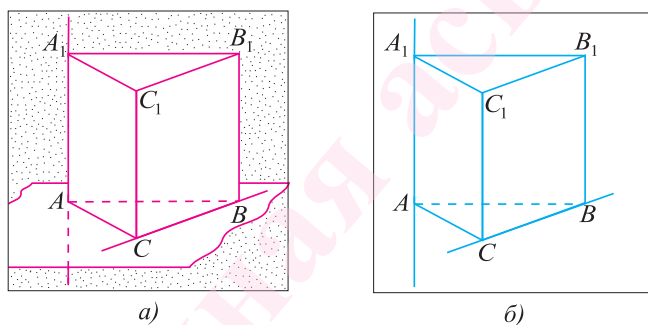


Рис. 98

Определение. Две прямые называются скрещивающимися, если не существует плоскости, в которой они обе лежат.

Возможны три случая взаимного расположения двух прямых в пространстве:

1) прямые пересекаются (имеют одну общую точку) (рис. 99, а);

2) прямые параллельны (лежат в одной плоскости и не пересекаются) (рис. 99, б);

3) прямые скрещиваются (не существует плоскости, в которой они обе лежат) (рис. 99, в).

2. Признак скрещивающихся прямых. Докажем теорему, которая позволяет выяснить, являются ли две прямые скрещивающимися.

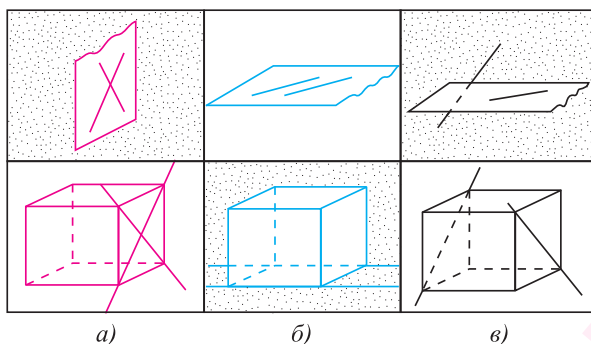


Рис. 99

Теорема 1 (признак скрещивающихся прямых). Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещиваются.

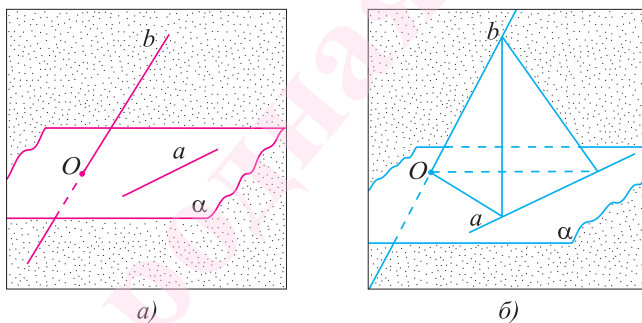


Рис. 100

Доказательство.

1) Пусть прямая a лежит в плоскости α , а прямая b пересекает эту плоскость в точке O , не лежащей на прямой a (рис. 100, а, б). Докажем, что прямые a и b скрещиваются, т. е. не существует плоскости, в которой они обе лежат.

2) Предположим, что прямые a и b лежат в некоторой плоскости β . Тогда плоскость β проходит через прямую a и точку O , а следовательно, совпадает с плоскостью α (так как через прямую и не лежащую на ней точку проходит

единственная плоскость). Получили, что прямая b лежит в плоскости α , а это противоречит условию теоремы. Таким образом, наше предположение неверно, а значит, прямые a и b скрещивающиеся.

Теорема доказана.

Рассмотрим пример. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма. Тогда прямые AB_1 и BC скрещивающиеся, так как прямая AB_1 пересекает плоскость ABC в точке A , не лежащей на прямой BC (рис. 101, а).

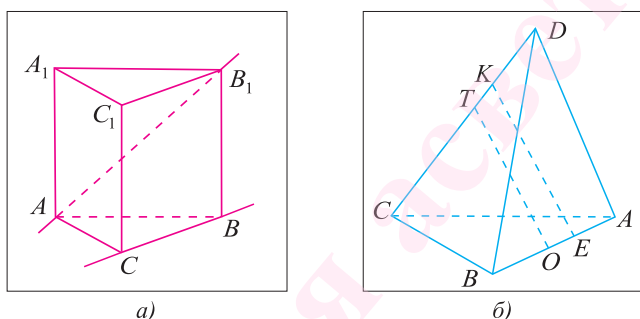


Рис. 101

Задача 1. Точки T и K лежат на ребре CD , а точки O и E — на ребре AB треугольной пирамиды $DABC$ (рис. 101, б). Докажите, что прямые TO и KE скрещивающиеся.

Доказательство.

Прямая TK пересекает плоскость ABC в точке S , не лежащей на прямой OE , следовательно, прямые TK и OE скрещивающиеся. Значит, точки T , K , E и O не лежат в одной плоскости. Отсюда следует, что прямые TO и KE не лежат в одной плоскости, т. е. являются скрещивающимися.

Теорема 2. *Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит единственная плоскость, параллельная другой прямой.*

Доказательство.

1. Доказательство существования плоскости.

Пусть a и b — скрещивающиеся прямые (рис. 102 а, б). Докажем, что через прямую b проходит плоскость, параллельная прямой a . Через какую-либо точку O прямой b проведем прямую c , параллельную прямой a . Пусть α —

плоскость, проходящая через прямые b и c . Так как прямая a не лежит в плоскости α и параллельна прямой c , лежащей в этой плоскости, то прямая a параллельна плоскости α .

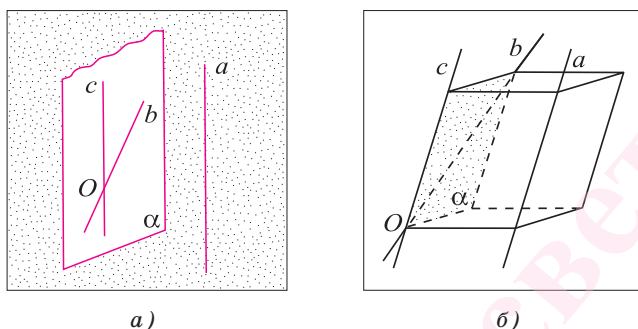


Рис. 102

2. Доказательство единственности.

Плоскость α — единственная плоскость, проходящая через прямую b и параллельная прямой a . Действительно, любая другая плоскость, проходящая через прямую b , пересекается с прямой c , а следовательно, пересекается и с параллельной ей прямой.

Задача 2. Точка O — середина ребра SA треугольной пирамиды $SABC$. Постройте сечение пирамиды плоскостью α , проходящей через прямую OC и параллельной прямой AB .

Решение.

Плоскость α проходит через точку O , принадлежащую плоскости SAB , и параллельна прямой $AB \subset (SAB)$, следовательно, она пересекает плоскость SAB по прямой l , проходящей через точку O и параллельной прямой AB . Строим точку $F = l \cap SB$, где $l \parallel AB$ и $O \in l$. Плоскость α пересекает грань SAB по отрезку OF , а грани SAC и SBC — по отрезкам OC и CF соответственно. Треугольник COF — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α (выполните рисунок самостоятельно).

Задача 3. Точки P , T и E принадлежат соответственно ребрам AB , SC и AS треугольной пирамиды $SABC$. Постройте сечение пирамиды плоскостью α , проходящей через прямую PT и параллельной прямой EC .

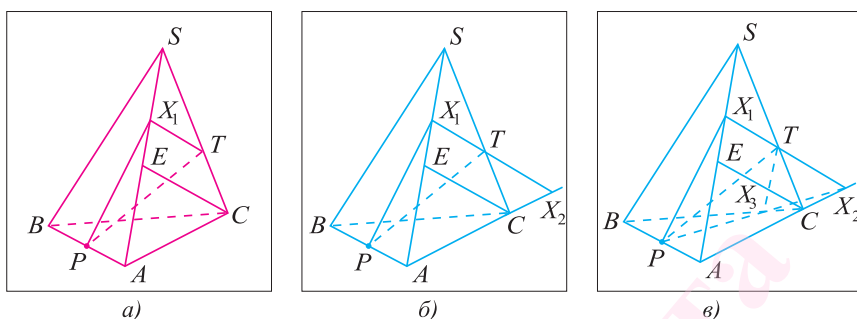


Рис. 103

Решение.

1) Плоскость α проходит через точку T и параллельна прямой EC , следовательно, она пересекает плоскость SAC по прямой, проходящей через точку T и параллельной прямой EC . Построим точку $X_1 = l \cap SA$ ($l \parallel EC$, $T \in l$). Тогда плоскость α пересекает грань SAC по отрезку TX_1 , а грань SAB — по отрезку X_1P (рис. 103, а).

2) Строим точку $X_2 = X_1T \cap AC$ (точка X_2 лежит в секущей плоскости) (рис. 103, б).

3) Находим точку $X_3 = X_2P \cap BC$. Секущая плоскость пересекает грани ABC и SBC по отрезкам X_3P и X_3T соответственно. Таким образом, четырехугольник X_1PX_3T — искомое сечение (рис. 103, в).

Вопросы и задачи к § 3

237. Прямая l лежит в плоскости α , а прямая b пересекает плоскость α в точке A . Верно ли утверждение, что прямые l и b скрещивающиеся?

238. Точки A , B и C принадлежат плоскости α и не лежат на одной прямой, точка D не принадлежит плоскости α . Сколько пар скрещивающихся прямых определяют данные точки?

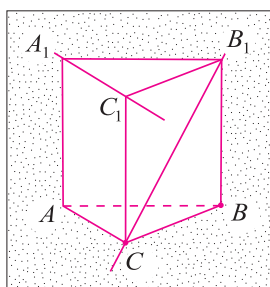
239. Верно ли утверждение, что две прямые являются скрещивающимися, если они лежат в разных плоскостях?

240. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма (рис. 104, а).
а) Верно ли утверждение, что прямые AB и CB_1 скрещивающиеся?

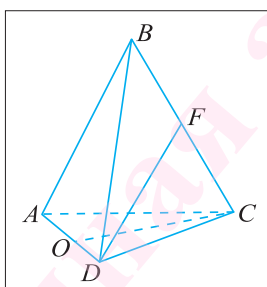
щиеся? б) Докажите, что прямые A_1C_1 и CB являются скрещивающимися. в) Назовите какую-либо прямую, которая является скрещивающейся для прямой BB_1 .

241. $ABCD$ — треугольная пирамида, точка F лежит на ребре BC , $O \in AD$ (рис. 104, б). а) Верно ли утверждение, что прямые AD и BC являются скрещивающимися? б) Докажите, что прямые DF и AC являются скрещивающимися. в) Приведите примеры прямых, которые являются скрещивающимися для прямой CO .

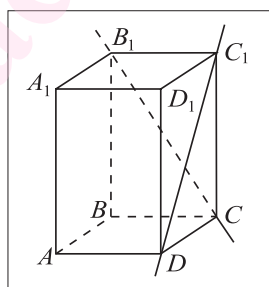
242. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед (рис. 104, в). а) Докажите, что прямые DC_1 и CB_1 скрещивающиеся. б) Верно ли, что прямые B_1C и AD пересекаются? в) Являются ли прямые BC и DC_1 скрещивающимися?



а)



б)



в)

Рис. 104

243. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, точка O лежит на ребре CB . а) Верно ли, что прямые AB и C_1O скрещивающиеся? б) Докажите, что прямые AC и C_1O скрещивающиеся.

244. Прямоугольники $ABCD$ и $CDEK$ не лежат в одной плоскости, $O \in SK$, $X \in CB$ и $M \in CD$ (рис. 105). а) Установите взаимное расположение прямых OX и ME . б) Пересекаются ли прямые CD и OX ? в) Верно ли, что прямые OX и KE скрещивающиеся?

245. Точка O не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$, а точка T — середина отрезка OB . а) Докажите, что прямые OA и BD скрещивающиеся. б) Пересекаются

ли прямые TC и BD ? в) Установите взаимное расположение прямых AO и TC .

246. На рисунке 106 изображен куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. а) Докажите, что прямые BA_1 и AC скрещивающиеся. б) Верно ли, что прямые BC и DC_1 пересекаются? в) Установите взаимное расположение прямых $A_1 B$ и DC_1 . г) Охарактеризуйте взаимное расположение прямых $A_1 B$ и $D_1 C_1$.

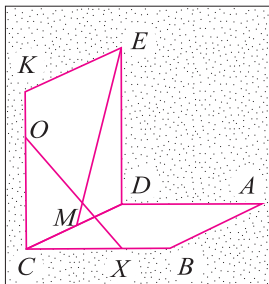


Рис. 105

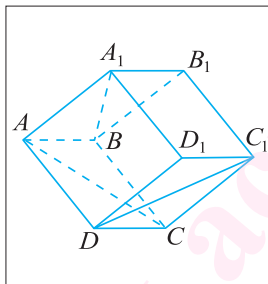


Рис. 106

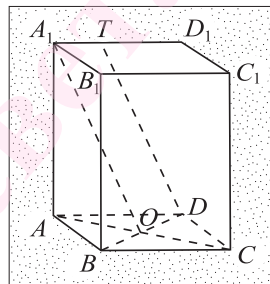


Рис. 107

247. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. а) Верно ли, что прямые DB и CD_1 скрещивающиеся? б) Пересекаются ли прямые AC и DB_1 ? в) Верно ли, что прямые DB_1 и KT лежат в одной плоскости (точка K — середина ребра $B_1 C_1$, а точка T — середина ребра DC)?

248. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед (рис. 107). а) Верно ли, что прямые OA_1 и TD параллельны? б) Пересекаются ли прямые BD_1 и TD ? в) Являются ли прямые OA_1 и CC_1 , TD и CC_1 скрещивающимися?

249. $DABC$ — треугольная пирамида. Точки K , T и E — середины ребер AD , CB и DB соответственно. а) Выясните, как расположены прямые AD и CB . б) Верно ли, что прямые AE и KT пересекаются? в) Сколько пар скрещивающихся прямых определяют вершины пирамиды?

250. Прямые a и b параллельны, а прямая c пересекает прямую a и не пересекает прямую b . Докажите, что прямые b и c скрещивающиеся.

251. Плоскости α и β пересекаются по прямой m , а прямая a пересекает плоскости α и β соответственно в точках A и B , не лежащих на прямой m (рис. 108). Докажите, что прямые m и a скрещивающиеся.

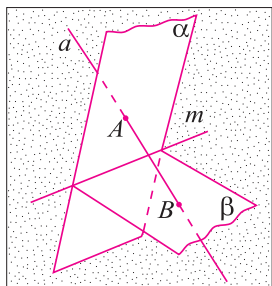


Рис. 108

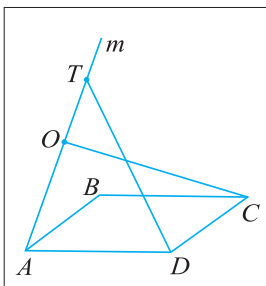


Рис. 109

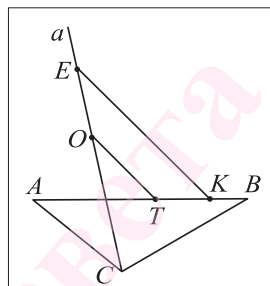


Рис. 110

252. Даны скрещивающиеся прямые a и b , точки A и B лежат на прямой a , точки C и D — на прямой b . Докажите, что прямые AC и BD скрещивающиеся.

253. Прямая m пересекает плоскость, в которой лежит параллелограмм $ABCD$, в точке A , $O \in m$, $T \in m$ (рис. 109). а) Установите взаимное расположение прямых OC и DT . Дайте обоснование ответа. б) Докажите, что прямые AB и OC скрещивающиеся. в) Верно ли, что прямые TD и BC пересекаются?

254. Пересекающиеся прямые a и b лежат в плоскости α . Прямая c параллельна прямой a и не лежит в плоскости α . Докажите, что прямые b и c скрещивающиеся.

255. Прямая a пересекает плоскость ABC в точке C . Точки O и E лежат на прямой a , $T \in AB$, $K \in AB$ (рис. 110). а) Верно ли, что прямые AC и OT пересекаются? б) Докажите, что прямые a и AB скрещивающиеся. в) Охарактеризуйте взаимное расположение прямых OT и EK .

256. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая a , параллельная медиане $СК$ этого треугольника, а через вершину B — прямая c , не лежащая в плоскости треугольника. Докажите, что прямые a и c скрещивающиеся.

257. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, $O \in BC$ (рис. 111). а) Докажите, что прямые $C_1 O$ и AB скрещивающиеся. б) Верно ли, что прямые $D_1 C$ и BB_1 скрещиваются? в) Верно ли, что прямые $D_1 C$ и $C_1 O$ параллельны? Дайте обоснование ответа.

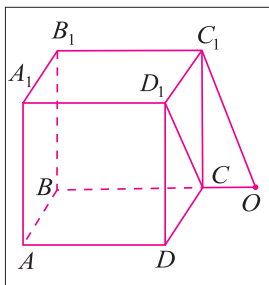


Рис. 111

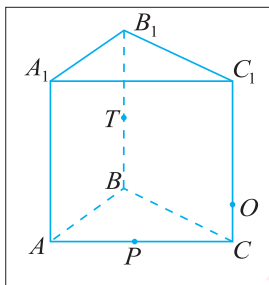


Рис. 112

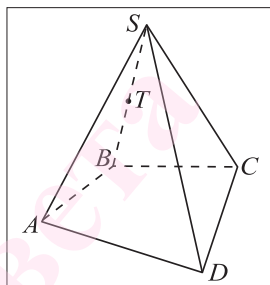


Рис. 113

258. Точки T и K — середины ребер AC и SB треугольной пирамиды $SABC$ соответственно. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую CK и параллельной прямой ST .

259. Точки T , O и P принадлежат ребрам BB_1 , CC_1 , AC треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ соответственно (рис. 112). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через прямую PO и параллельной прямой CT .

260. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки T , O , E и K — середины ребер C_1C , CA , CB и BB_1 соответственно. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через прямую TO и параллельной прямой EK .

261. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка T — середина ребра SB (рис. 113). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую TD и параллельной прямой AC .

262. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ точки Q и P — середины ребер SB и SC соответственно, а точка R — точка пересечения диагоналей AC и BD основания. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую DQ и параллельной прямой PR .

§ 4. Угол между прямыми

Любые две пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости и образуют четыре неразвернутых угла. Если пересекающиеся прямые образуют тупые и острые углы, то углом между этими прямыми называется тот, который не превосходит любой из трех остальных углов. Если пересекающиеся прямые образуют четыре равных угла, то угол между этими прямыми равен 90° . Угол α между двумя пересекающимися прямыми удовлетворяет условию: $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$.

Теперь введем понятие угла между скрещивающимися прямыми. Пусть a и b — две скрещивающиеся прямые. Возьмем произвольную точку O_1 в пространстве и проведем через нее прямые a_1 и b_1 , параллельные прямым a и b соответственно. Углом между скрещивающимися прямыми a и b называется угол между построенными пересекающимися прямыми a_1 и b_1 (рис. 114, а).

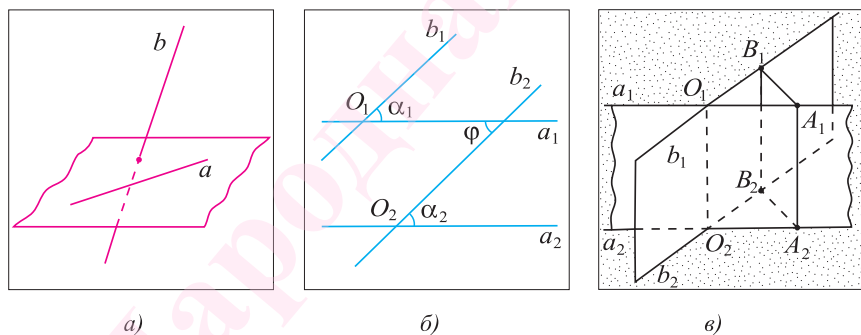


Рис. 114

Докажем, что угол между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки O_1 . Возьмем любую другую точку O_2 и проведем через нее прямые a_2 и b_2 , параллельные прямым a и b соответственно. Пусть угол между прямыми a_1 и b_1 равен α_1 , а угол между прямыми a_2 и b_2 равен α_2 .

Если прямые a_1, b_1, a_2, b_2 лежат в одной плоскости, то по свойству накрест лежащих углов при параллельных прямых $\alpha_1 = \phi = \alpha_2$ (рис. 114, б).

Пусть теперь прямые a_1 и b_1 , пересекающиеся в точке O_1 , лежат в одной плоскости, а прямые a_2 и b_2 , пересекающиеся в точке O_2 , — в другой плоскости (рис. 114, в). Возьмем на прямых a_1 , b_1 и a_2 , b_2 точки A_1 , B_1 и A_2 , B_2 так, чтобы $\angle A_1O_1B_1 = \alpha_1$, а четырехугольники $A_1A_2O_2O_1$ и $B_1B_2O_2O_1$ были параллелограммами ($O_1A_1 = O_2A_2$, $O_1B_1 = O_2B_2$). Тогда четырехугольник $A_1B_1B_2A_2$ — параллелограмм ($B_1B_2 = O_1O_2$, $B_1B_2 \parallel O_1O_2$, $A_1A_2 = O_1O_2$, $A_1A_2 \parallel O_1O_2$, значит, $B_1B_2 = A_1A_2$, $B_1B_2 \parallel A_1A_2$). Отсюда следует, что $A_1B_1 = A_2B_2$. Таким образом, треугольники $A_1O_1B_1$ и $A_2O_2B_2$ равны по трем сторонам. Из равенства этих треугольников следует, что $\alpha_1 = \alpha_2$.

Из определения угла между скрещивающимися прямыми следует, что он не превосходит 90° .

Угол между параллельными прямыми считается равным 0° .

Две прямые называются *взаимно перпендикулярными* (перпендикулярными), если угол между ними равен 90° . Если прямая a перпендикулярна прямой b , то пишут $a \perp b$.

Из определения следует, что перпендикулярные прямые могут пересекаться, а могут быть скрещивающимися.

Для нахождения угла между двумя данными скрещивающимися прямыми a и b можно взять на одной из них, например на прямой a , некоторую точку O и в плоскости, определяемой прямой b и точкой O , провести через точку O прямую b_1 , параллельную прямой b . Тогда угол между прямыми a и b_1 равен углу между скрещивающимися прямыми a и b (рис. 115, а).

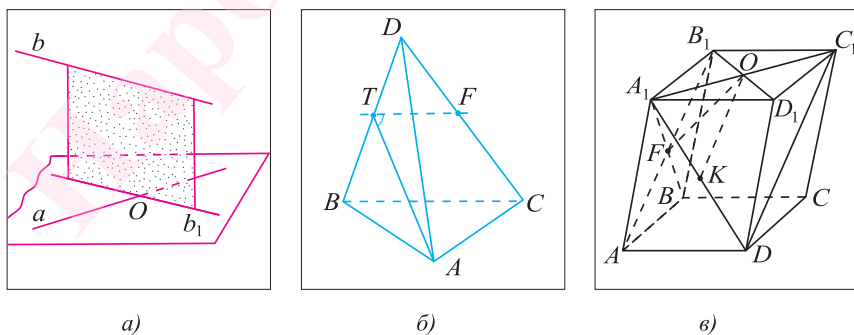


Рис. 115

Например, пусть на ребре DB треугольной пирамиды $DABC$ взята точка T (рис. 115, б). Тогда угол между скре-

составляющимися прямыми BC и AT равен углу между прямой AT и прямой TF , которая проходит через точку T и параллельна прямой BC в плоскости BDC .

Рассмотрим еще пример. Пусть в параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка O — точка пересечения диагоналей грани $A_1 B_1 C_1 D_1$, а точка F — точка пересечения диагоналей грани $AA_1 B_1 B$. Угол между скрещивающимися прямыми $C_1 D$ и OF равен углу между прямой OF и прямой OK , проходящей в плоскости $C_1 D A_1$ через точку O и параллельной прямой $C_1 D$ (рис. 115, в).

Задача 1. В треугольной пирамиде $SABC$ точка D принадлежит ребру SC , а точка O лежит внутри треугольника ABC . Постройте угол между прямыми SO и BD .

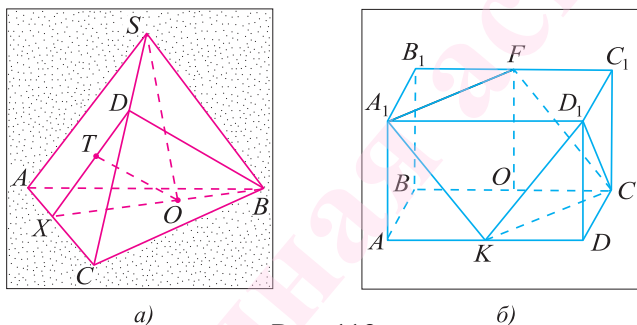


Рис. 116

Решение.

1) Рассмотрим плоскость α , проходящую через прямую DB и точку O (рис. 116, a).

2) Сечением пирамиды плоскостью α является треугольник DXB ($X = BO \cap AC$).

3) В плоскости DXB через точку O проведем прямую OT , параллельную прямой DB . Тогда угол SOT искомым.

Задача 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 1$ см, $AD = 2$ см, $AA_1 = 1$ см. Найдите угол между прямыми $A_1 F$ и $D_1 K$, где точки F и K — середины ребер $B_1 C_1$ и AD соответственно.

Решение.

І. Построение искомого угла.

1) Рассмотрим плоскость α , проходящую через прямую A_1F и точку K (рис. 116, б).

2) Плоскость α проходит через прямую A_1K , параллельную плоскости грани BB_1C_1C (так как $A_1K \parallel B_1O$, где точка O — середина ребра BC), а следовательно, пересекает эту грань по отрезку, параллельному прямой B_1O , т. е. по отрезку FC .

3) Сечение параллелепипеда плоскостью α есть четырехугольник KA_1FC , который является параллелограммом (так как $A_1K = FC$, $A_1K \parallel FC$). Следовательно, $KC \parallel A_1F$. Отсюда следует, что угол D_1KC искомым.

II. Нахождение градусной меры угла.

1) Угол D_1KC найдем из треугольника D_1KC .

2) $\triangle KDD_1 = \triangle CDD_1$ ($DK = DC$, $\angle KDD_1 = \angle CDD_1 = 90^\circ$, DD_1 — общая сторона), $\triangle KDC = \triangle CDD_1$ ($DK = DD_1$, DC — общая сторона, $\angle KDC = \angle CDD_1 = 90^\circ$). Отсюда следует, что треугольник D_1KC равносторонний. Значит, $\angle D_1KC = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

Задача 3. $SABC$ — тетраэдр. Точки F и K — середины его ребер AB и AC соответственно. Найдите косинус угла между прямыми SF и BK (рис. 117).

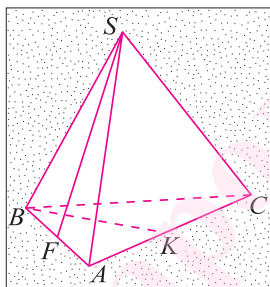
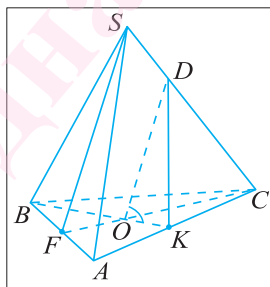
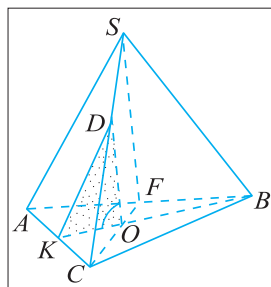


Рис. 117



а)



б)

Рис. 118

Решение.

1) В плоскости SFC через точку $O = BK \cap FC$ проведем прямую OD , параллельную прямой SF . Тогда угол DOK искомым. Соединим точку D с точкой K и найдем косинус угла DOK треугольника DOK . Для нахождения косинуса угла DOK вычислим длины сторон треугольника DOK и воспользуемся теоремой косинусов. Пусть длина ребра тетраэдра равна a , $\angle DOK = x$ (рис. 118, а, б).

2) В треугольнике DKC ($CD = \frac{2}{3}CS = \frac{2}{3}a$, $CK = \frac{a}{2}$, $\angle KCD = 60^\circ$) $DK^2 = CK^2 + CD^2 - 2 \cdot CK \cdot CD \cos 60^\circ$, $DK^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{9} - 2 \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2}$, $DK^2 = \frac{13a^2}{36}$.

3) В треугольнике SFC $OD \parallel SF$, $OC = \frac{2}{3}FC$, следовательно, $OD = \frac{2}{3}SF = \frac{2}{3}\sqrt{SA^2 - FA^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

4) В треугольнике DOK ($OD = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $OK = \frac{1}{3}BK = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$) $DK^2 = OD^2 + OK^2 - 2 \cdot OD \cdot OK \cos x$, $\frac{13a^2}{36} = \frac{a^2}{3} + \frac{3a^2}{36} - 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cos x$. Отсюда $\cos x = \frac{1}{6}$.

О т в е т: $\frac{1}{6}$.

Вопросы и задачи к § 4

263. Какой угол называется углом между скрещивающимися прямыми?

264. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые, а прямая b_1 параллельна прямой b . Верно ли утверждение, что угол между прямыми a и b равен углу между прямыми a и b_1 ?

265. Угол между прямыми a и b равен 90° . Верно ли, что прямые a и b пересекаются?

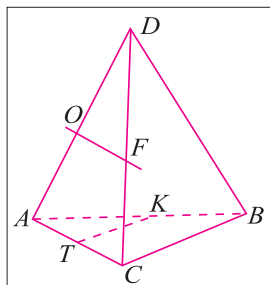
266. Прямые a и b скрещивающиеся. Прямая l проходит через точку $O \in a$, параллельна прямой b и образует с прямой a угол, равный β . Верно ли, что угол между прямыми a и b равен β ?

267. $DABC$ — тетраэдр, точки O и F — середины ребер AD и CD соответственно, отрезок TK — средняя линия треугольника ABC (рис. 119, а). а) Чему равен угол между прямыми OF и CB ? б) Верно ли, что угол между прямыми OF и TK равен 60° ? в) Чему равен угол между прямыми TF и DB ?

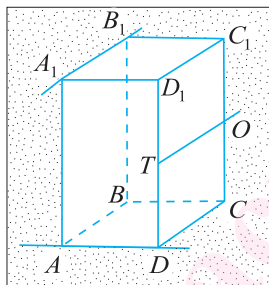
268. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, точки O и T — середины ребер CC_1 и DD_1 соответственно (рис. 119, б). а) Верно ли, что угол между прямыми AD

и TO равен 90° ? б) Чему равен угол между прямыми A_1B_1 и BC ?

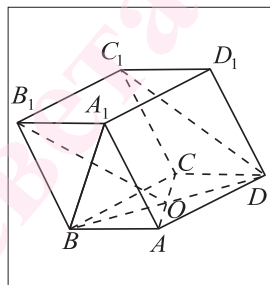
269. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб (рис. 119, в). а) Верно ли, что угол между прямыми A_1B и C_1D равен 90° ? б) Найдите угол между прямыми B_1O и C_1D . в) Верно ли, что угол между прямыми AC и C_1D равен 45° ?



а)



б)



в)

Рис. 119

270. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, точка O — точка пересечения диагоналей грани $DD_1 C_1 C$. а) Найдите угол между прямыми A_1O и AB_1 ; б) Верно ли, что угол между прямыми A_1O и KT (точки K и T — середины ребер AA_1 и AD соответственно) равен 30° ?

271. Два квадрата $ABCD$, $BCKT$ и прямоугольный треугольник ABT ($\angle ABT = 90^\circ$) расположены в пространстве так, как показано на рисунке 120. Точки P и O — середины отрезков AB и BC соответственно. а) Найдите угол между прямыми PO и DK . б) Верно ли, что угол между прямыми TC и DK равен 90° ? в) Найдите угол между прямыми AT и KF , где точка F — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$.

272. В пространстве даны квадрат $ABCD$ и треугольники ABO ($\angle ABO = 90^\circ$) и CBO ($\angle CBO = 90^\circ$), $BC = BO$. а) Верно ли, что прямые BO и DC взаимно перпендикулярны? б) Найдите угол между прямыми AC и KT , где K и T — середины от-

резков BO и BC соответственно. в) Чему равен угол между прямыми BD и OC ?

273. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. Точки K , F и T — середины ребер AB , $D_1 C_1$ и $B_1 B$ соответственно (рис. 121). а) Верно ли, что прямые $A_1 T$ и DF взаимно перпендикулярны? б) Чему равен угол между прямыми AB и CC_1 ? в) Вычислите косинус угла между прямыми $A_1 K$ и $B_1 F$.

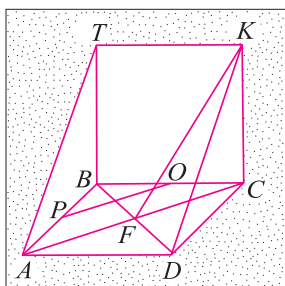


Рис. 120

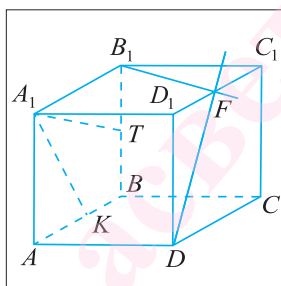


Рис. 121

274. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 1$ см, $AA_1 = 1$ см, $AD = 3$ см. Точки F и K лежат на ребрах $B_1 C_1$ и AD так, что $B_1 F : B_1 C_1 = 2 : 3$, $AK : AD = 1 : 3$. Найдите угол между прямыми $A_1 F$ и $D_1 K$.

275. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, длина каждого ребра которой равна a , точка F — середина ребра SC (рис. 122). а) Найдите угол между прямыми AB и SD . б) Перечертите рисунок в тетрадь. Постройте угол между прямыми DF и AC , найдите этот угол.

276. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ длина каждого ребра равна a . Точка K — середина ребра SA . Постройте угол между прямыми AD , CK и найдите его.

277. $SABC$ — тетраэдр. Медианы грани ABC пересекаются в точке O . Точки P , E и D — середины ребер SC , SA и SB соответственно (рис. 123). а) Найдите угол между прямыми BC и PE . б) Перечертите рисунок в тетрадь. Постройте угол между прямыми BC и OD , найдите этот угол.

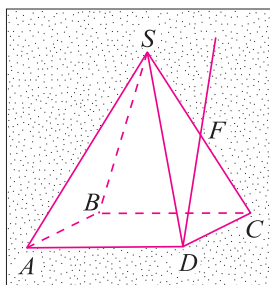


Рис. 122

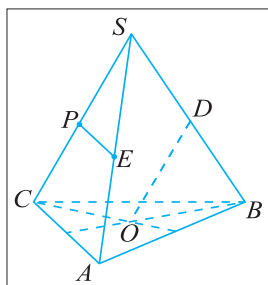


Рис. 123

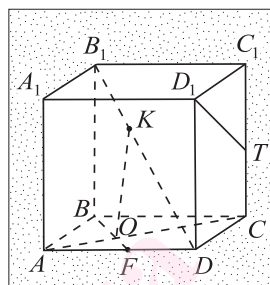


Рис. 124

278. В тетраэдре $SABC$ точка O — точка пересечения медиан основания ABC , а точка D — середина ребра SB . Найдите угол между прямыми AC и OD .

279. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки F и T — середины ребер AD и CC_1 соответственно, $DK : DB_1 = 2 : 3$, $O = AC \cap BF$, $K \in B_1 D$ (рис. 124). а) Докажите, что прямые OK и $D_1 T$ взаимно перпендикулярны. б) Найдите угол между прямыми OK и DC . в) Найдите угол между прямыми OK и $A_1 D$.

§ 5. Параллельность плоскостей

1. Признак параллельности плоскостей. В данном параграфе рассмотрим свойства параллельных плоскостей.

Определение. Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Представление о параллельных плоскостях дают, например, пол и потолок комнаты, поверхности пола и стоящего на нем стола, противоположные стенки шкафов и др.

Если две плоскости α и β параллельны, то пишут $\alpha \parallel \beta$ и говорят: «Плоскость α параллельна плоскости β ».

Теорема 1 (признак параллельности плоскостей). Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

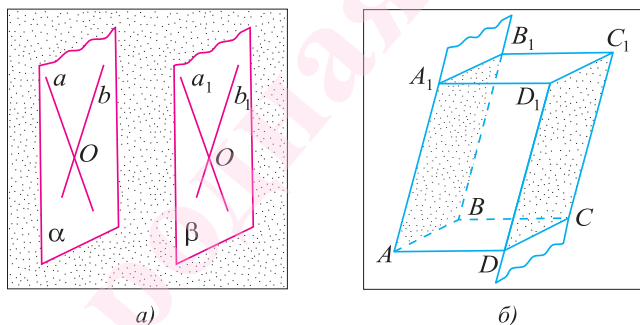


Рис. 125

Доказательство.

Пусть даны две плоскости α и β . В плоскости α лежат пересекающиеся в точке O прямые a и b , а в плоскости β — прямые a_1 и b_1 такие, что $a \parallel a_1$ и $b \parallel b_1$ (рис. 125, а). Заметим, что каждая из прямых a и b параллельна плоскости β ($a \parallel \beta$, $b \parallel \beta$).

Предположим, что плоскости α и β не параллельны. Пусть они пересекаются по прямой s . Тогда плоскость α проходит через прямую a , параллельную плоскости β , и пе-

ресекает плоскость β по прямой c , следовательно, прямая a параллельна прямой c (см. теорему 2, § 2). Аналогично плоскость α проходит через прямую b , параллельную плоскости β , и пересекает ее по прямой c , значит, прямая b параллельна прямой c .

Таким образом, исходя из предположения, получили, что через точку O проходят две прямые a и b , параллельные прямой c . Но это противоречит теореме о том, что через точку O проходит единственная прямая, параллельная прямой c . Следовательно, наше предположение неверно и плоскости α и β параллельны.

Теорема доказана.

Теорема 2 (о свойстве противоположащих граней параллелепипеда). *Противолежщие грани параллелепипеда лежат в параллельных плоскостях.*

Доказательство.

Докажем, например, что грани AA_1B_1B и DD_1C_1C параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ лежат в параллельных плоскостях. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $AB \parallel CD$. Четырехугольник AA_1D_1D — параллелограмм, следовательно, $AA_1 \parallel DD_1$. Таким образом, две пересекающиеся прямые AB и AA_1 плоскости, в которой лежит грань AA_1B_1B , соответственно параллельны прямым DC и DD_1 плоскости, в которой лежит грань DD_1C_1C , следовательно, по признаку параллельности указанные плоскости параллельны (рис. 125, б).

2. Свойства параллельных плоскостей. Рассмотрим некоторые свойства параллельных плоскостей.

Теорема 3 (о прямых пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью). *Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то прямые их пересечения параллельны между собой.*

Доказательство.

Пусть α и β — параллельные плоскости, которые пересекает плоскость γ (рис. 126, а, б). Рассмотрим прямые a и b , по которым плоскость γ пересекает плоскости α и β соответственно. Докажем, что $a \parallel b$. Действительно, эти прямые лежат в одной плоскости γ и не пересекаются. Если бы пря-

мые a и b пересекались, то их общая точка принадлежала бы плоскостям α и β , чего быть не может, так как по условию они параллельны. Таким образом, прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются, т. е. $a \parallel b$.

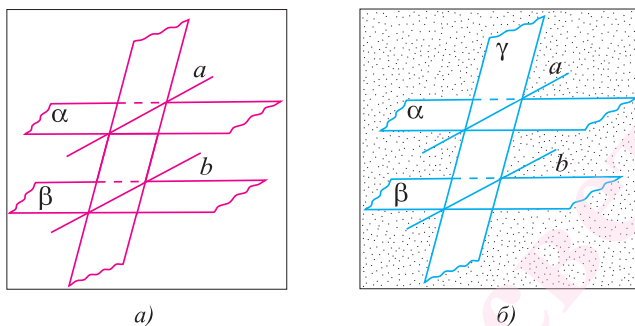


Рис. 126

Задача 1. Точки P , T и E — соответственно середины ребер AA_1 , A_1B_1 и DD_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки P , T и E . Какая фигура получится в сечении?

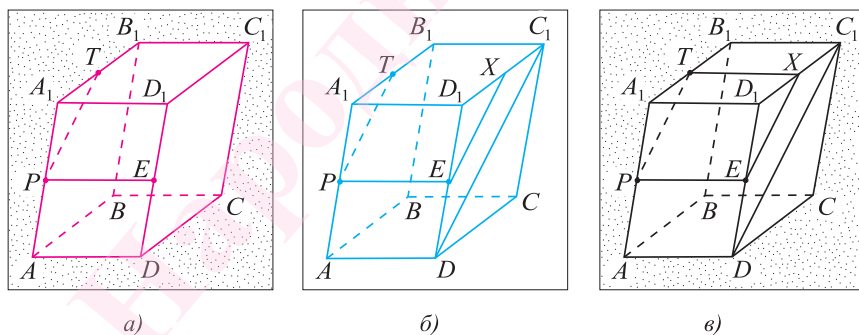


Рис. 127

Решение.

1) Плоскость PTE пересекает грани AA_1B_1B и AA_1D_1D по отрезкам PT и PE соответственно (рис. 127, а).

2) Плоскость грани DD_1C_1C параллельна плоскости грани AA_1B_1B , следовательно, секущая плоскость PTE пересекает

плоскость грани DD_1C_1C по прямой, параллельной прямой PT . Строим точку $X = l \cap D_1C_1$ ($l \parallel DC_1$, $E \in l$) (рис. 127, б).

3) Четырехугольник $TPEX$ — искомое сечение. Так как $PT \parallel EX$, $PT = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{1}{2}DC_1 = EK$, то четырехугольник $TPEX$ — параллелограмм (рис. 127, в).

Теорема 4. *Отрезки параллельных прямых, расположенные между параллельными плоскостями, равны.*

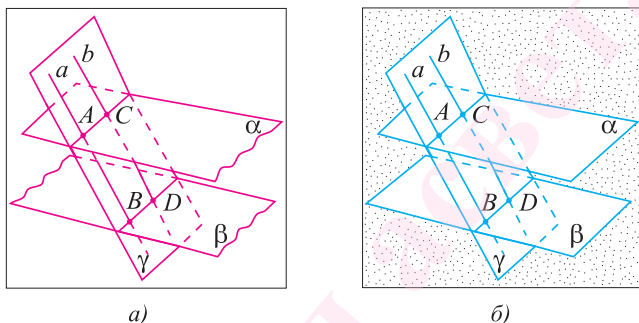


Рис. 128

Доказательство.

Пусть AB и CD — отрезки параллельных прямых a и b , расположенные между параллельными плоскостями α и β (рис. 128, а, б). Докажем, что $AB = CD$. Плоскость γ , проходящая через параллельные прямые a и b , пересекает плоскости α и β по параллельным прямым AC и BD (теорема 2). Следовательно, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, так как в нем противолежащие стороны попарно параллельны. В параллелограмме противолежащие стороны равны, значит, $AB = CD$.

Теорема доказана.

Задача 2. Докажите, что если прямая l пересекает плоскость α , то она пересекает любую плоскость β , параллельную плоскости α . Проведите доказательство самостоятельно.

Теорема 5 (о существовании единственной плоскости, параллельной данной плоскости и проходящей через точку вне ее). *Через точку, не лежащую в данной плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной.*

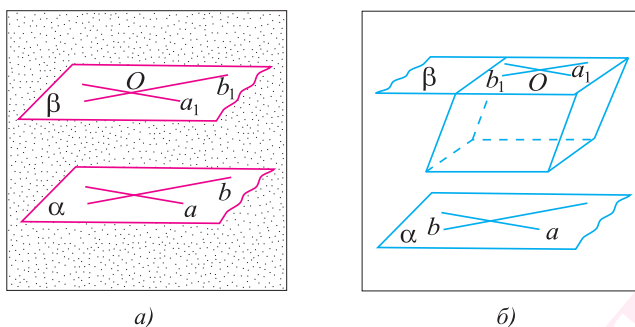


Рис. 129

I. Доказательство существования плоскости.

1) Пусть точка O не лежит в данной плоскости α . Рассмотрим в плоскости α какие-либо две пересекающиеся прямые a и b (рис. 129, а, б).

2) Проведем через точку O прямые a_1 и b_1 , параллельные прямым a и b соответственно.

3) Рассмотрим плоскость β , проходящую через прямые a_1 и b_1 .

4) Плоскость β — искомая, так как она проходит через точку O и по признаку параллельности двух плоскостей параллельна плоскости α .

II. Доказательство единственности плоскости.

1) Предположим, что существует другая плоскость β_1 , проходящая через точку O и параллельная плоскости α .

2) Пусть l — прямая, по которой плоскость β_1 пересекает плоскость β . Проведем в плоскости β_1 прямую b , пересекающую прямую l .

3) Прямая b пересекает плоскость β , поэтому она пересекает и параллельную ей плоскость α . Следовательно, плоскость β_1 , в которой лежит прямая b , пересекает плоскость α .

Таким образом, наше предположение неверно и плоскость β единственная.

Теорема доказана.

Задача 3. Докажите, что через две скрещивающиеся прямые a и b можно провести две параллельные плоскости α и β ($a \subset \alpha$, $b \subset \beta$), и притом такая пара плоскостей единственная.

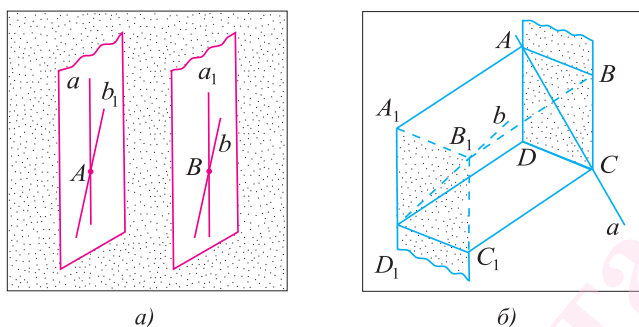


Рис. 130

Доказательство.

Пусть a и b — скрещивающиеся прямые (рис. 130, а). Возьмем произвольные точки $A \in a$, $B \in b$ и проведем через них прямые $b_1 \parallel b$, $a_1 \parallel a$, $A \in b_1$, $B \in a_1$. Пары a , b_1 и b , a_1 пересекающихся прямых определяют плоскости α и β соответственно. Тогда согласно признаку параллельности плоскостей плоскости α и β параллельны.

Докажем единственность существования такой пары плоскостей.

Допустим, что существует еще пара плоскостей α_1 и β_1 таких, что $\alpha_1 \parallel \beta_1$, $a \subset \alpha_1$, $b \subset \beta_1$. Через точку B и прямую a проведем плоскость γ . Пусть эта плоскость пересекает плоскости β и β_1 по прямым c и c_1 соответственно. Так как $B \in b$, $b \subset \beta$, $b \subset \beta_1$, то прямые c и c_1 проходят через точку B . Тогда по теореме 2 $a \parallel c$, $a \parallel c_1$, а это противоречит тому, что через точку B вне данной прямой a можно провести единственную прямую, параллельную данной.

Полученное противоречие говорит о том, что наше предположение неверное, а следовательно, существует единственная пара плоскостей α и β , удовлетворяющих условию задачи.

Например, если $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, тогда пара параллельных плоскостей, проходящих через скрещивающиеся прямые AC и $B_1 D_1$, есть плоскости граней $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 130, б).

Вопросы и задачи к § 5

280. Можно ли признак параллельности двух плоскостей сформулировать так: две плоскости параллельны, если две прямые одной плоскости параллельны двум прямым другой плоскости?

281. Верно ли утверждение, что если через каждую из параллельных прямых провести плоскость, то эти плоскости параллельны?

282. Можно ли две параллельные плоскости пересечь третьей плоскостью по двум непараллельным прямым?

283. Можно ли две пересекающиеся плоскости пересечь третьей плоскостью по параллельным прямым?

284. Сколько можно провести через данную точку плоскостей, параллельных данной плоскости?

285. Параллельны ли между собой две плоскости, если они параллельны одной и той же прямой?

286. Точка A лежит в плоскости α , которая параллельна плоскости β . Докажите, что каждая прямая, проходящая через точку A и параллельная плоскости β , лежит в плоскости α .

287. Плоскости α и β параллельны, а прямая l параллельна плоскости α . Докажите, что прямая l либо параллельна плоскости β , либо лежит в плоскости β .

288. Две плоскости α и β параллельны плоскости γ . Докажите, что плоскости α и β параллельны.

289. Точки T , K и E — середины ребер SA , AB и AC пирамиды $SABC$ соответственно, отрезок DK — медиана треугольника TKE (рис. 131, а). а) Докажите, что прямая DK параллельна плоскости SBC . б) Верно ли, что прямая CP пересекает плоскость TKE ?

290. $ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма, точки O , F и K — середины ребер BB_1 , BC и BA соответственно, $T \in CB_1$ (рис. 131, б). а) Докажите, что плоскости ACB_1 и OKF параллельны. б) Верно ли, что прямая AT параллельна плоскости OKF ?

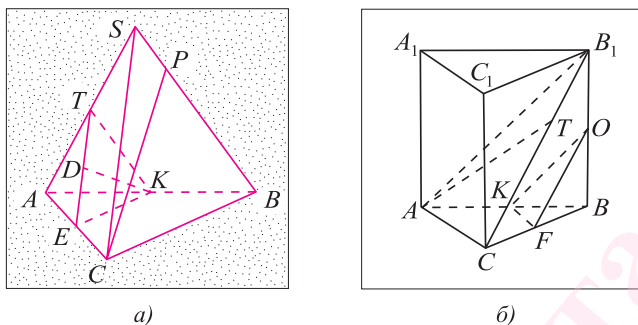


Рис. 131

291. Пусть $SABC$ — треугольная пирамида. Точка S является серединой отрезков AA_1 , BB_1 и CC_1 . Докажите, что плоскость $A_1B_1C_1$ параллельна плоскости ABC .

292. Точка O не лежит в плоскости треугольника ABC , точки T , K и E — середины отрезков OA , OB и OC соответственно. а) Докажите, что плоскости TKE и ABC параллельны. б) Вычислите площадь треугольника TKE , если площадь треугольника ABC равна 16 см^2 (рис. 132).

293. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — четырехугольная призма. Докажите, что основания $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ призмы лежат в параллельных плоскостях.

294. $SABC$ — треугольная пирамида. Точки T , P принадлежат ребрам AC и SC соответственно, а точка K — грани SCB (рис. 133). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку $O \in SB$ и параллельной плоскости TPK .

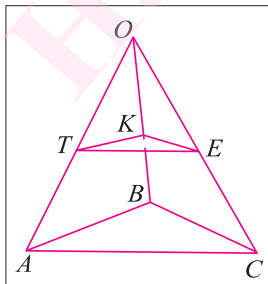


Рис. 132

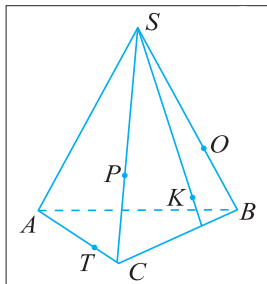


Рис. 133

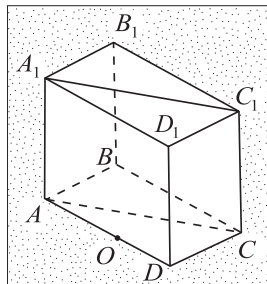


Рис. 134

295. $SABC$ — тетраэдр. Точка T — середина ребра SC , а точка O — середина отрезка TC . Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку O и параллельной плоскости ATB . Вычислите периметр этого сечения, если длина ребра тетраэдра равна 4 см.

296. Четырехугольник ACC_1A_1 — сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью ACC_1 (рис. 134). а) Верно ли, что четырехугольник ACC_1A_1 — параллелограмм? б) Перечертите изображение параллелепипеда в тетрадь и постройте сечение плоскостью, проходящей через точку O и параллельной плоскости ACC_1 .

297. Изобразите параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и постройте его сечения плоскостями $AA_1 C_1$ и ADK , где точка K — середина ребра CC_1 . Постройте отрезок, по которому пересекаются эти сечения.

298. На рисунке 135 изображено сечение $B_1 XDT$ параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через точку B_1 и параллельной плоскости AKC , где точка K — середина ребра BB_1 . а) Верно ли, что четырехугольник $B_1 XDT$ — параллелограмм? б) Докажите, что прямые KO и $B_1 D$ параллельные, где $O = BD \cap AC$.

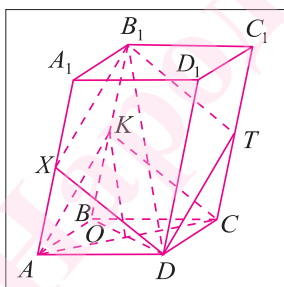


Рис. 135

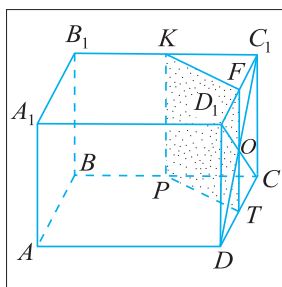


Рис. 136

299. Изобразите параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте его сечение плоскостью, проходящей через середину ребра DD_1 и параллельной плоскости AKC , где точка K — середина ребра BB_1 . Постройте отрезок, по которому построенное сечение пересекает диагональное сечение $BDD_1 B_1$.

300. Четырехугольник $PTFK$ — сечение параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точку O и параллельной плоскости BDD_1 (рис. 136). а) Объясните, почему прямые KF и PT параллельны. б) Верно ли, что прямые PK и TF параллельны? в) Почему прямая AA_1 параллельна плоскости сечения?

301. $ABCA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, основание которого есть квадрат, длина стороны которого 1 см, а длина бокового ребра 4 см. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через середину ребра AA_1 и параллельной плоскости ADC_1 . Вычислите его периметр.

302. Четырехугольник TKC_1C — сечение параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точку O и ребро CC_1 (рис. 137). а) Верно ли, что прямая KT параллельна прямой CC_1 ? б) Докажите, что прямая BB_1 параллельна плоскости TKC_1C .

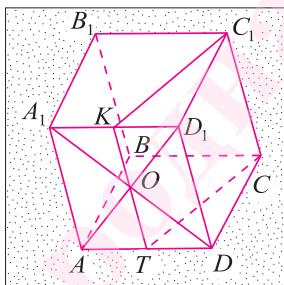


Рис. 137

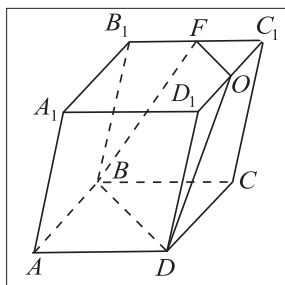


Рис. 138

303. Постройте изображение параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ и его сечение плоскостью, проходящей через точку пересечения диагоналей грани $ABCD$ и параллельной плоскости ADC_1 . Докажите, что прямая B_1D параллельна плоскости сечения.

304. Четырехугольник $BDOF$ — сечение параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через прямую BD и середину O ребра D_1C_1 (рис. 138). Докажите, что прямые

BD и FO параллельны. б) Верно ли, что четырехугольник $BDOF$ является трапецией?

305. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямая четырехугольная призма, основание которой — ромб, длина стороны которого 6 см, а один из углов 60° . Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через меньшую диагональ $B_1 D_1$ ромба и середину ребра AD . Вычислите площадь сечения, если длина бокового ребра призмы равна 10 см.

306. Четырехугольник $BFD_1 O$ — сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через прямую BD_1 и середину O ребра AA_1 (рис. 139). а) Докажите, что четырехугольник $BFD_1 O$ — параллелограмм. б) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку A и параллельной плоскости сечения $BFD_1 O$.

307. Все ребра прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ равны между собой. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины A, B и середину ребра CC_1 , равна S .

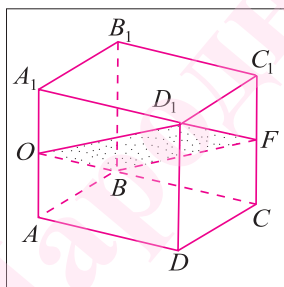


Рис. 139

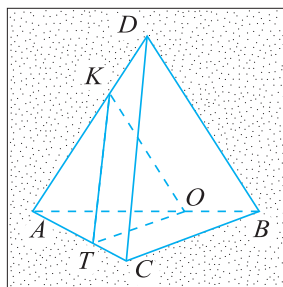


Рис. 140

308. Треугольник TKO — сечение правильной треугольной пирамиды $DABC$ плоскостью, проходящей через точку O ($BO : OA = 1 : 2$) и параллельной плоскости DBC (рис. 140). Докажите, что треугольники TKO и CDB подобны. Вычислите периметр треугольника TKO , если длина стороны основания пирамиды равна 3 см, а длина бокового ребра — 9 см.

309. В треугольной пирамиде $DABC$ сечение, параллельное плоскости ABC , пересекает боковое ребро в точке, делящей его в отношении $1:3$ (считая от вершины пирамиды). Найдите площадь сечения, если площадь треугольника ABC равна S .

310. В пирамиде $DABC$ сечение, параллельное основанию, пересекает боковое ребро в точке, делящей его в отношении $2:3$ (считая от вершины пирамиды). Вычислите площадь сечения, если его площадь на 84 см^2 меньше площади основания.

311. Четырехугольник $OTЕК$ — сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через точку O ($SO:OA = 2:3$) и параллельной плоскости SCD (рис. 141). Вычислите периметр сечения, если $CD = 30 \text{ см}$, $SD = 25 \text{ см}$.

312. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, а градусная мера угла при вершине S грани DSC равна 60° . Через точку O , взятую на ребре AD , проведено сечение плоскостью, параллельной грани SDC . Вычислите периметр этого сечения, если длина его диагонали равна 7 см , а $AO = 3 \text{ см}$.

313. $TABC$ — правильная треугольная пирамида. Точки D и E — середины ребер AB и TA соответственно. Треугольники EKC и TDP — параллельные сечения, проходящие через CE и TD соответственно, $K \in AB$, $P \in CB$. Найдите площадь треугольника TDP , если площадь треугольника EKC равна S (рис. 142).

314. $SABC$ — правильная треугольная пирамида. Точки F , K и T — середины ребер SC , AC и AB соответственно. Площадь сечения плоскостью, проходящей через прямую AF и параллельной прямой BC , равна Q . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки K , T и параллельной прямой AF .

315. Боковое ребро четырехугольной пирамиды разделено на три равные части, и через точки деления проведены

плоскости, параллельные плоскости основания. Найдите площадь полученных сечений, если площадь основания равна S .

316. $SABC$ — треугольная пирамида. Точка O делит боковое ребро SA пирамиды в отношении $2:3$ (считая от вершины S). Треугольник OFK — сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку O и параллельной плоскости ABC , $F \in SB$, $K \in SC$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $SOFK$, если площадь боковой поверхности пирамиды $SABC$ равна Q .

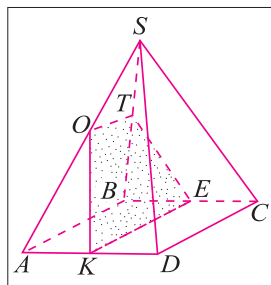


Рис. 141

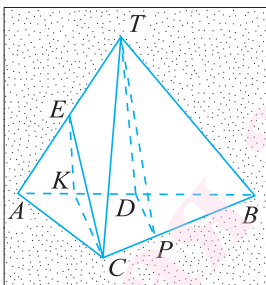


Рис. 142

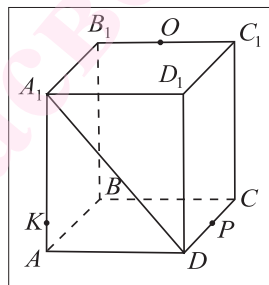


Рис. 143

317. Площадь сечения пирамиды плоскостью α , проходящей через точку на боковом ребре и параллельной основанию, равна 5 см^2 . В каком отношении плоскость α делит боковое ребро пирамиды, если площадь основания равна 45 см^2 .

318. Длина стороны основания правильной треугольной пирамиды равна a , а длина бокового ребра — b . Через точку, делящую боковое ребро в отношении $1:3$ (считая от вершины пирамиды), проведено сечение, параллельное боковой грани. Найдите площадь этого сечения.

319. Точка O делит ребро A_1D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ в отношении $2:3$ ($A_1O:OD_1 = 3:2$). Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку O и параллельной плоскости AB_1C . Найдите

площадь этого сечения, если площадь треугольника AB_1C равна 50 см^2 .

320. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки O , P и K лежат на ребрах $B_1 C_1$, DC и AA_1 соответственно (рис. 143). Выполните изображение параллелепипеда в тетради и постройте его сечение плоскостью OPK .

321. Точки O , E и K — середины ребер AD , CC_1 и $A_1 B_1$ параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью OEK .

3

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ.
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ



Глава 3

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

§ 1. Перпендикулярность прямой и плоскости

1. Прямая, перпендикулярная плоскости. В предыдущей главе было определено понятие перпендикулярности прямых в пространстве. Теперь рассмотрим понятие перпендикулярности прямой и плоскости.

Определение. Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой, лежащей в этой плоскости.

Если прямая a перпендикулярна плоскости α , то пишут $a \perp \alpha$. В этом случае говорят также, что плоскость α перпендикулярна прямой a .

Представление о части прямой, перпендикулярной плоскости, дает прямая пересечения поверхностей стен комнаты по отношению к плоскости пола. Колонны здания расположены перпендикулярно по отношению к плоскости фундамента.

В дальнейшем понадобится следующая теорема о перпендикулярности двух параллельных прямых третьей прямой.

Теорема 1. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна этой прямой.

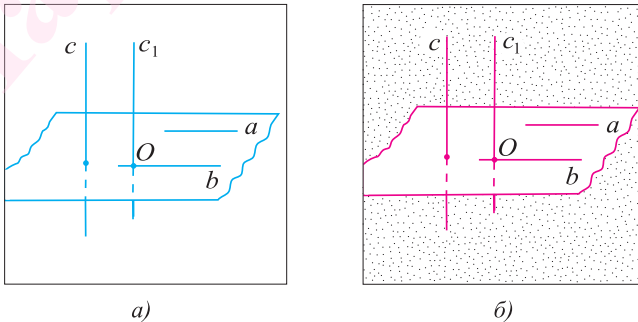


Рис. 144

Доказательство.

Пусть a и b — параллельные прямые и $a \perp c$. Докажем, что $a \perp b$. Возьмем точку O на прямой b и через нее проведем прямую c_1 , параллельную прямой c . Тогда угол между прямыми b и c равен углу между пересекающимися прямыми b и c_1 . Так как $b \parallel a$ и $c \parallel c_1$, то угол между прямыми b и c_1 равен углу между прямыми a и c , т. е. равен 90° . Отсюда следует, что $b \perp c$ (рис. 144, а, б).

Теорема доказана.

Теперь докажем две теоремы, в которых устанавливается связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью плоскости.

Теорема 2. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

Доказательство.

Пусть прямые a и a_1 параллельны и прямая a перпендикулярна плоскости α . Докажем, что прямая a_1 также перпендикулярна плоскости α . Рассмотрим произвольную прямую l в плоскости α (рис. 145, а, б). Так как $a \perp \alpha$, то $a \perp l$. Из теоремы 1 следует, что $a_1 \perp l$. Таким образом, прямая a_1 перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости α , т. е. $a_1 \perp \alpha$.

Теорема доказана.

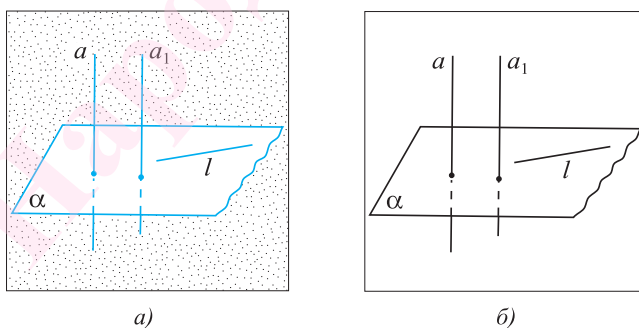


Рис. 145

Теорема 3 (о параллельности прямых, перпендикулярных плоскости). Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны.

Доказательство.

Пусть прямые a и b перпендикулярны плоскости α (рис. 146, а). Докажем, что прямые a и b параллельны. Допустим, что прямая b не параллельна прямой a . Через произвольную точку O прямой b проведем прямую b_1 , параллельную прямой a . По теореме 2 прямая b_1 перпендикулярна плоскости α . Рассмотрим плоскость β , в которой лежат прямые b и b_1 . Пусть l — прямая, по которой пересекаются плоскости α и β (рис. 146, б). Тогда в плоскости β через точку O проходят две прямые b и b_1 , перпендикулярные прямой l . Но это невозможно, следовательно, наше предположение неверно и $a \parallel b$.

Теорема доказана.

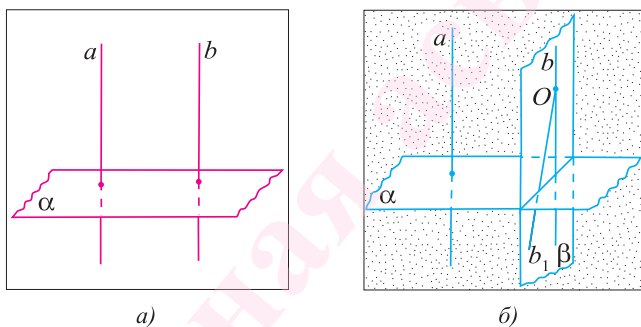


Рис. 146

Для установления факта перпендикулярности прямой и плоскости достаточно проверить перпендикулярность прямой только двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости. Это вытекает из следующей теоремы.

2. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема 4 (признак перпендикулярности прямой и плоскости). *Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.*

Доказательство.

Пусть прямая a перпендикулярна прямым p и q , лежащим в плоскости α и пересекающимся в точке O . Докажем, что прямая перпендикулярна плоскости α . Для этого нужно доказать, что прямая a перпендикулярна произвольной прямой l плоскости α .

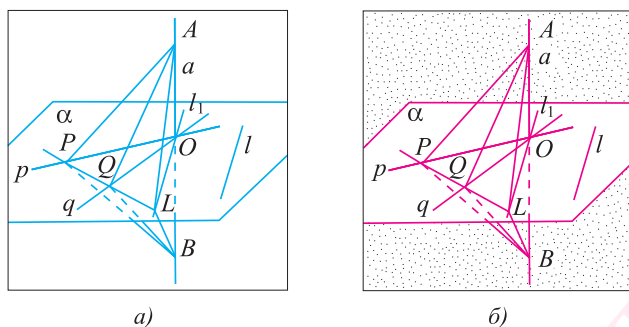


Рис. 147

Рассмотрим первый случай, когда прямая a проходит через точку O . Проведем через точку O прямую l_1 , параллельную прямой l (если прямая l проходит через точку O , то в качестве l_1 возьмем прямую l). Отметим на прямой a точки A и B так, чтобы точка O была серединой отрезка AB , и проведем в плоскости α прямую, пересекающую прямые p , q и l соответственно в точках P , Q и L . Пусть для определенности точка Q лежит между точками P и L (рис. 147, а, б).

Заметим, что $AP = BP$ и $AQ = BQ$, так как $\triangle AOP = \triangle BOP$ и $\triangle AOQ = \triangle BOQ$ (указанные треугольники равны по двум катетам). Следовательно, $\triangle APQ = \triangle BPQ$ (так как $AP = BP$, $AQ = BQ$, PQ — общая сторона). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle APQ = \angle BPQ$.

Треугольники APL и BPL равны (так как $AP = BP$, PL — общая сторона, а $\angle APL = \angle BPL$), следовательно, $AL = BL$. Таким образом, треугольник ABL — равнобедренный, и его медиана OL является высотой, т. е. прямая l_1 перпендикулярна прямой a . Так как прямая l_1 параллельна прямой l , то по теореме 1 $l \perp a$. Прямая a перпендикулярна каждой прямой l плоскости α , значит, $a \perp \alpha$.

Если прямая a не проходит через точку O , тогда проведем через точку O прямую a_1 , параллельную прямой a . Тогда по теореме 1 $a_1 \perp p$ и $a_1 \perp q$. Следовательно, по доказанному в первом случае $a_1 \perp \alpha$. Теперь по теореме 2 прямая a перпендикулярна плоскости α . Теорема доказана.

Теорема 5 (о плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной прямой). *Через любую*

точку пространства проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.

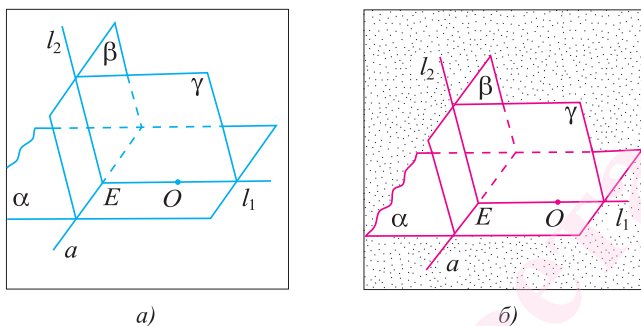


Рис. 148

Доказательство.

I. Докажем существование плоскости.

Пусть a — данная прямая, а точка O — произвольная точка пространства. Докажем, что существует плоскость, проходящая через точку O и перпендикулярная прямой a .

1) Рассмотрим плоскость α , проходящую через прямую a и точку O , и плоскость β , проходящую через прямую a (рис. 148, а, б).

2) В плоскости α через точку O проведем прямую l_1 , перпендикулярную прямой a . Пусть точка E — точка пересечения прямых a и l_1 .

3) Через точку E в плоскости β проведем прямую l_2 , перпендикулярную прямой a .

4) Плоскость γ , проходящая через прямые l_1 и l_2 , является искомой. Действительно, прямая a перпендикулярна двум пересекающимся прямым l_1 и l_2 плоскости γ , следовательно, она перпендикулярна плоскости γ .

II. Докажем единственность плоскости.

Допустим, что через точку O проходит еще одна плоскость γ_1 , перпендикулярная прямой a . Пусть плоскость γ_1 пересекает плоскость α по прямой p_1 . Тогда $a \perp l_1$ и $a \perp p_1$. Следовательно, в плоскости α через точку O проходят две прямые l_1 и p_1 , перпендикулярные прямой a . Как известно из планиметрии, этого быть не может. Таким образом, наше предположение неверно и плоскость γ единственная.

Теорема доказана.

Теорема 6 (о прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной плоскости). *Через любую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.*

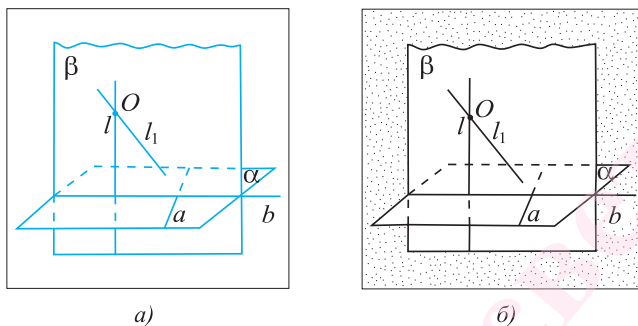


Рис. 149

Доказательство.

I. Докажем существование прямой.

Пусть дана плоскость α и точка O — произвольная точка пространства. Докажем, что существует прямая, проходящая через точку O и перпендикулярная плоскости α (рис. 149, а, б).

1) Проведем в плоскости α некоторую прямую a и рассмотрим плоскость β , проходящую через точку O и перпендикулярную прямой a .

2) Обозначим буквой b прямую, по которой пересекаются плоскости α и β .

3) В плоскости β через точку O проведем прямую l , перпендикулярную прямой b . Прямая l — искомая прямая. Действительно, прямая l перпендикулярна двум пересекающимся прямым a и b плоскости α ($l \perp b$ по построению и $l \perp a$, так как $\beta \perp a$), следовательно, она перпендикулярна плоскости α (см. рис. 149, а, б).

II. Докажем единственность плоскости.

Предположим, что через точку O проходит еще одна прямая l_1 , перпендикулярная плоскости α . Тогда по теореме 3 прямые l и l_1 параллельны, что невозможно, так как прямые l и l_1 пересекаются в точке O . Таким образом, наше предположение неверно и через точку O проходит одна прямая, перпендикулярная плоскости α .

Теорема доказана.

Теорема 7 (о свойстве диагонали прямоугольного параллелепипеда). *Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин трех его ребер, имеющих общую вершину.*

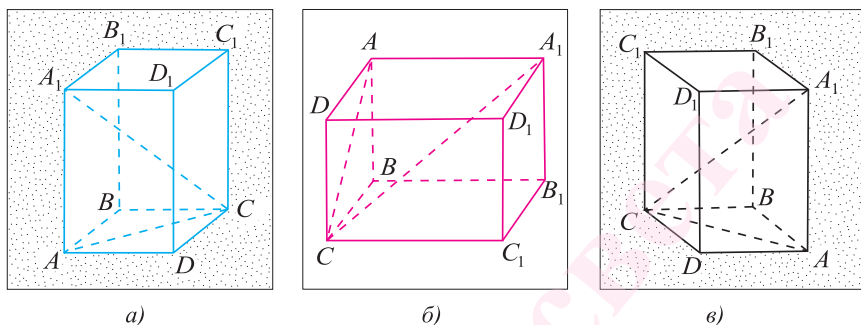


Рис. 150

Доказательство.

Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед (все его грани прямоугольники). Докажем, что $A_1 C^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$.

Из условия следует, что $AA_1 \perp AB$ и $AA_1 \perp AD$. Значит, по признаку перпендикулярности прямой плоскости прямая AA_1 перпендикулярна плоскости, в которой лежит грань $ABCD$. Отсюда следует, что $AA_1 \perp AC$. В прямоугольном треугольнике $A_1 AC$ по теореме Пифагора $A_1 C^2 = AC^2 + AA_1^2$. Кроме того, $AC^2 = AB^2 + AD^2$ (так как AC — диагональ прямоугольника $ABCD$). Следовательно, $A_1 C^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$ (рис. 150, а, б, в).

Следствие. *Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.*

Задача. Докажите, что если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то эта прямая перпендикулярна и другой плоскости.

Доказательство. Пусть плоскости α и β параллельны, а прямая $l \perp \alpha$. Докажем, что $l \perp \beta$.

1) Рассмотрим пересекающиеся прямые a и b в плоскости α .

2) Через произвольную точку в плоскости β проведем прямые a_1 и b_1 , параллельные прямым a и b соответственно. Эти прямые лежат в плоскости β (глава 2, § 2, задача 2).

3) Прямая l перпендикулярна прямым a и b (так как $l \perp \alpha$), следовательно, она перпендикулярна прямым a_1 и b_1 (глава 3, § 1, теорема 1).

4) Таким образом, прямая l перпендикулярна двум пересекающимся прямым a_1 и b_1 плоскости β , следовательно, прямая $l \perp \beta$.

Вопросы и задачи к § 1

322. Верно ли утверждение, что прямая a , перпендикулярная прямой l , лежащей в плоскости β , перпендикулярна плоскости β ?

323. Прямая l перпендикулярна двум прямым, лежащим в плоскости α . Верно ли утверждение, что прямая l перпендикулярна плоскости α ?

324. Как расположены между собой две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости?

325. Верно ли утверждение, что две прямые перпендикулярные третьей прямой, параллельны между собой?

326. Будут ли параллельны между собой две плоскости, перпендикулярные одной и той же плоскости?

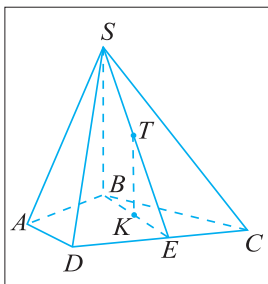
327. Докажите, что две плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны между собой.

328. $SABCD$ — четырехугольная пирамида, у которой боковое ребро SB перпендикулярно плоскости основания, точка E лежит на ребре DC . а) Докажите, что прямая KT перпендикулярна плоскости основания (точки K и T — середины отрезков BE и SE соответственно). б) Чему равен угол между прямыми KT и AD (рис. 151, а)?

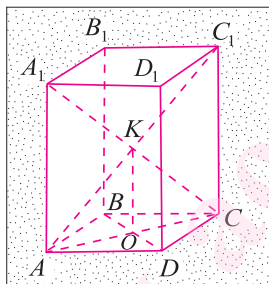
329. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямой параллелепипед. Точка K — точка пересечения его диагоналей, а точка O — точка пересечения диагоналей основания (рис. 151, б). а) Верно ли, что прямая OK перпендикулярна плоскости ABC ?

- б) Докажите, что прямые OK и BC перпендикулярны.
 в) Найдите угол между прямыми CC_1 и BD .

330. Отрезок MA перпендикулярен плоскости треугольника ABC , точка O — точка пересечения его медиан. На отрезке MK (точка K — середина отрезка BC) взята точка P такая, что $MP:PK = 2:1$. а) Чему равен угол между прямыми OP и BC ? б) Верно ли, что прямые AB и PO перпендикулярны?



а)



б)

Рис. 151

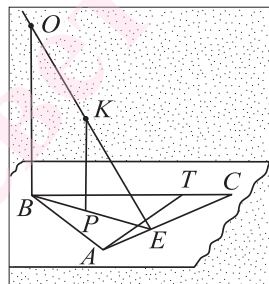


Рис. 152

331. Отрезок OB перпендикулярен плоскости треугольника ABC , $OK:KE = BP:PE$ (рис. 152). а) Докажите, что прямая PK перпендикулярна плоскости ABC . б) Верно ли, что прямые AT и PK перпендикулярны? в) Чему равен угол между прямыми AC и PK ?

332. В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SB перпендикулярно плоскости основания. Прямая l проходит через точку пересечения медиан грани SAC и перпендикулярна основанию. Постройте точку пересечения прямой l с плоскостью основания.

333. $SABC$ — треугольная пирамида, у которой боковое ребро SB перпендикулярно плоскости ABC . Прямая l проходит через точку O ($O \in ABC$) и перпендикулярна плоскости основания (рис. 153). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте точку пересечения прямой l с плоскостью SAC .

334. Плоскость ABC параллельна плоскости α . Через точки A , B и C проведены прямые, перпендикулярные плоско-

сти α и пересекающие ее в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

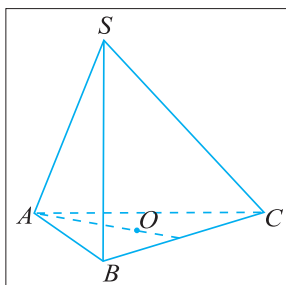


Рис. 153

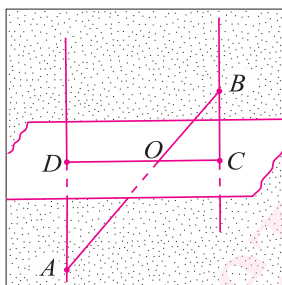


Рис. 154

335. Отрезок AB не имеет общих точек с плоскостью α . Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости и пересекающие ее в точках A_1 и B_1 соответственно. Вычислите длину отрезка A_1B_1 , если $AB = 13$ см, $AA_1 = 12$ см и $BB_1 = 24$ см.

336. Отрезок AB пересекает плоскость α в точке O . Прямые AD и BC , перпендикулярные этой плоскости, пересекают ее в точках D и C соответственно (рис. 154). а) Верно ли, что прямые AD и BC параллельны? б) Докажите, что точки D , O и C лежат на одной прямой, и вычислите длину отрезка AB , если $AD = 12$ см, $BC = 4$ см, $OC = 3$ см.

337. На прямых a и b , перпендикулярных плоскости α и пересекающих ее в точках A и B , взяты соответственно точки C и D так, что $CA = 9$ см, $DB = 15$ см. Вычислите длину отрезка CD , если $AB = 8$ см.

338. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед. Точка O — середина ребра CC_1 , а точка M лежит на ребре AA_1 так, что $AM : AA_1 = 1 : 3$. Вычислите длину отрезка MO , если длина диагонали параллелепипеда равна 13 см, а диагонали основания равны 5 см.

339. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед. Точки M и P принадлежат ребрам $B_1 C_1$ и BB_1 (рис. 155). а) Докажите, что прямая BC перпендикулярна плоскости, в которой лежит грань $AA_1 B_1 B$. б) Верно ли, что прямая MP

перпендикулярна прямой AD ? в) Найдите угол между прямыми B_1C и DC .

340. $SABC$ — треугольная пирамида, у которой $AB \perp SB$, $AB \perp BC$, $SB \perp BC$. а) Докажите, что прямая BC перпендикулярна плоскости SAB . б) Верно ли, что медиана CK треугольника SBC перпендикулярна прямой AB ?

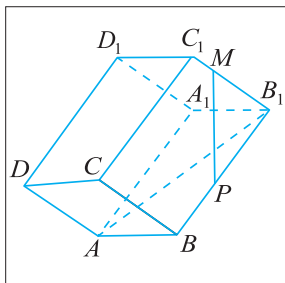


Рис. 155

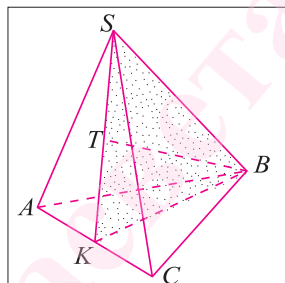


Рис. 156

341. $SABC$ — правильная треугольная пирамида, точка K — середина ребра AC (рис. 156). а) Докажите, что прямая AC перпендикулярна плоскости SKB . б) Верно ли, что прямые AC и SB перпендикулярны? в) Найдите угол между прямой AC и прямой, на которой лежит медиана BT треугольника SKB .

342. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, диагонали основания которой пересекаются в точке O . а) Докажите, что прямая SO перпендикулярна плоскости основания данной пирамиды. б) Чему равен угол между прямыми SO и CD ?

343. Точка O — середина ребра CB тетраэдра $SABC$. Постройте сечение данного тетраэдра плоскостью, проходящей через точку O и параллельной прямым AC и SB . Найдите площадь этого сечения, если ребро тетраэдра равно a .

344. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, основание которого — квадрат. Точки P , Q , F и T являются серединами его ребер (рис. 157). а) Докажите, что прямая CT перпендикулярна плоскости сечения $BB_1 PQ$. б) Чему равен

угол между прямыми TC и BP ? в) Верно ли, что прямая AF перпендикулярна плоскости сечения BB_1PQ ?

345. Точка P — середина ребра AD прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, основание которого — квадрат $ABCD$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BD , если $AD = a$, $AA_1 = b$.

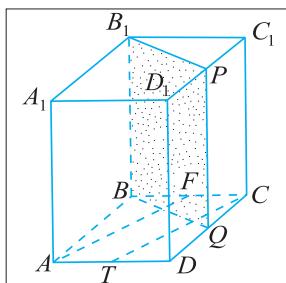


Рис. 157

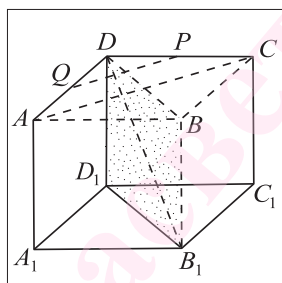


Рис. 158

346. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, основание которого — квадрат $ABCD$. Точки P и Q — середины ребер DC и DA соответственно (рис. 158). а) Докажите, что плоскость сечения $BDD_1 B_1$ перпендикулярна прямой AC . б) Почему прямая $B_1 D$ перпендикулярна прямой AC ? в) Верно ли, что прямая PQ перпендикулярна плоскости сечения $BDD_1 B_1$?

347. Постройте сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, перпендикулярной ребру AB и проходящей через середину этого ребра. Вычислите площадь этого сечения, если $AB = 4$ см.

348. $ABCD$ — тетраэдр, точки P , Q и E — середины его ребер (рис. 159). а) Докажите, что прямые PQ и AD перпендикулярны. б) Верно ли, что прямая EK (K принадлежит ребру AD) перпендикулярна прямой PQ ? в) Найдите угол между прямыми AE и PQ .

349. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит прямоугольник $ABCD$. Вычислите длину его бокового ребра, если $AB = 3$ см, $BC = 4$ см и $B_1 D = 5\sqrt{2}$ см.

350. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, CE — его медиана. Прямая CK перпендикулярна плоскости треугольника ABC . Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника KCE , если $CK = 6$ см (рис. 160).

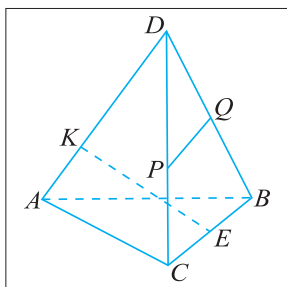


Рис. 159

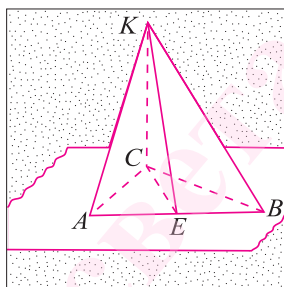


Рис. 160

351. В треугольнике ABC отрезок BT является его высотой. Отрезок BF перпендикулярен прямым AB и BC . Найдите угол между прямыми FT и PK , где точки P и K — середины отрезков AB и BC соответственно.

352. Отрезок BK перпендикулярен плоскости треугольника ABC . Вычислите длину этого отрезка, если $AK = 13$ см, $KC = 15$ см, а $BC - AB = 4$ см.

353. Боковое ребро SB треугольной пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости ее основания. Вычислите длину этого ребра, если $AB = 9$ см, $BC = 16$ см и $SC : SA = 4 : 3$.

354. Докажите, что если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

355. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит квадрат $ABCD$. Точка K лежит на отрезке AC так, что $AK : KC = 1 : 3$. Вычислите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку K и перпендикулярной прямой AC , если $AD = 4$ см, $AC_1 = 4\sqrt{6}$ см.

356. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб (рис. 161). а) Верно ли, что прямые BD_1 и AC перпендикулярны? б) Докажите, что пря-

мые BD_1 и AB_1 перпендикулярны. в) Докажите, что прямая BD_1 перпендикулярна плоскости AB_1C .

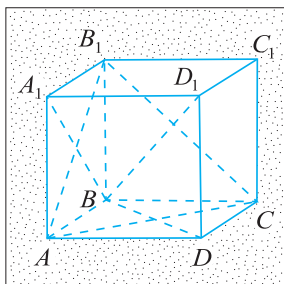


Рис. 161

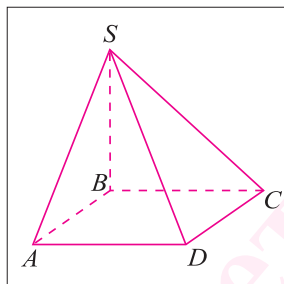


Рис. 162

357. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, основанием которого служит квадрат $ABCD$. Вычислите площадь боковой поверхности четырехугольной пирамиды $B_1 ABCD$, если $AB = 2$ см, $AC_1 = 2\sqrt{6}$ см.

358. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковые ребра взаимно перпендикулярны ($SC \perp SA$, $SC \perp SB$, $SA \perp SB$). Через точку O , взятую на ребре AC , построено сечение пирамиды, перпендикулярное прямой SC . Вычислите длину бокового ребра пирамиды, если площадь сечения равна 32 см², а $SO = 10$ см.

359. Боковое ребро SB четырехугольной пирамиды $SABCD$, основание которой — квадрат $ABCD$, перпендикулярно плоскости основания (рис. 162). а) Докажите, что прямая AD перпендикулярна плоскости SBA . б) Верно ли, что прямые SC и CD перпендикулярны? в) Вычислите длину ребра SB , если площадь боковой поверхности пирамиды равна 27 см², а $CD = 3$ см.

360. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 3$ см, $AD = 4$ см. К плоскости прямоугольника проведены перпендикулярные отрезки BB_1 и CC_1 так, что отрезок B_1C_1 не пересекает плоскость, в которой лежит прямоугольник. Вычислите длину отрезка B_1C_1 , если $AC_1 = \sqrt{41}$ см, $B_1D = \sqrt{74}$ см.

361. $SABC$ — правильная треугольная пирамида. Точка O — точка пересечения медиан треугольника ABC . Докажите, что прямая SO перпендикулярна плоскости ABC .

362. В правильной треугольной пирамиде $SABC$, боковые ребра которой взаимно перпендикулярны, на ребре SB взята точка D так, что $AD = 5$ см. Проекция этого отрезка на плоскость основания параллельно прямой SC равна $\sqrt{26}$ см. Вычислите длину бокового ребра пирамиды.

363. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ проведены два сечения: одно — через вершины A и B , перпендикулярное прямой SC , а другое — через вершину B и точку E , делящую ребро AC на отрезки $AE = 8$ см и $EC = 7$ см, параллельное прямой SC . Вычислите длину отрезка, по которому пересекаются эти сечения, если $SA = 12$ см.

364. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ из вершины C и из точки D , делящей ребро AC на отрезки $AD = 15$ см и $DC = 10$ см, проведены перпендикуляры к грани SAB . Вычислите длину каждого перпендикуляра, если расстояние между их основаниями равно 6 см.

365. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середину ребра BB_1 и перпендикулярной прямой BD_1 . Найдите площадь этого сечения, если длина ребра куба равна a .

366. Через центр основания правильной треугольной пирамиды параллельно двум ее непересекающимся ребрам проведена плоскость. Найдите площадь получившегося сечения, если длина бокового ребра пирамиды равна a , а стороны основания равны b .

§ 2. Перпендикуляр и наклонная. Расстояние от точки до плоскости

1. Перпендикуляр и наклонная. Пусть точка A не лежит на плоскости α . Проведем через точку A прямую, перпендикулярную плоскости α , и обозначим буквой O точку пересечения этой прямой с плоскостью α (рис. 163, а). *Перпендикуляром, проведенным из точки A к плоскости α , называется отрезок AO , точка O называется основанием перпендикуляра.* Если AO — перпендикуляр к плоскости α , а M — произвольная точка этой плоскости, отличная от точки O , то отрезок AM называется *наклонной*, проведенной из точки A к плоскости α , а точка M — *основанием наклонной*. Отрезок OM — *ортогональная проекция* (или, короче, *проекция*) наклонной AM на плоскость α .

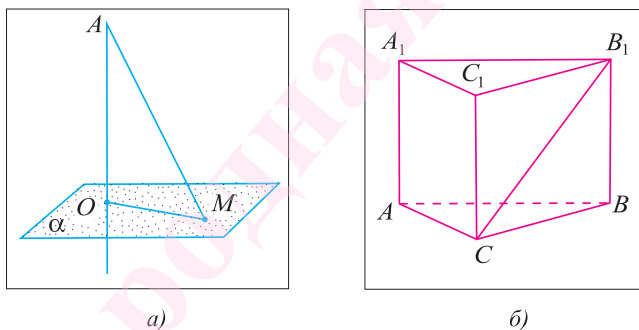


Рис. 163

Например, если $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, то перпендикуляр, проведенный из точки B_1 к плоскости ее основания ABC , есть ребро B_1B , отрезок CB — проекция наклонной B_1C на плоскость ABC (рис. 163, б).

2. Теорема о трех перпендикулярах. Докажем теорему, которая играет важную роль при решении многих задач.

Теорема 1 (о трех перпендикулярах). *Прямая, проведенная в плоскости и перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной.*

Доказательство.

Пусть AO и AM — соответственно перпендикуляр и наклонная к плоскости α , a — прямая, проведенная в плоскости α и перпендикулярная проекции OM (рис. 164, а, б). Докажем, что $a \perp AM$.

Прямая a перпендикулярна плоскости OAM , так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым OA и OM этой плоскости ($a \perp OM$ по условию, $a \perp AO$, так как $AO \perp \alpha$). Следовательно, прямая a перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости AOM , т. е. $a \perp AM$.

Теорема доказана.

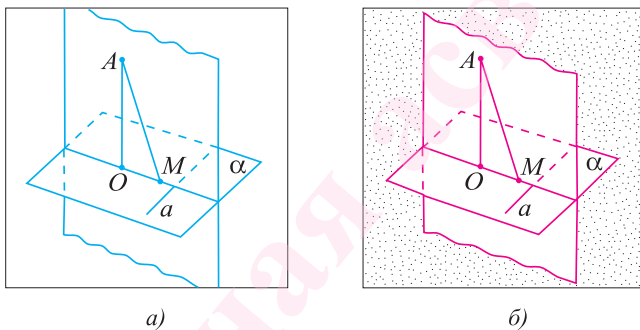


Рис. 164

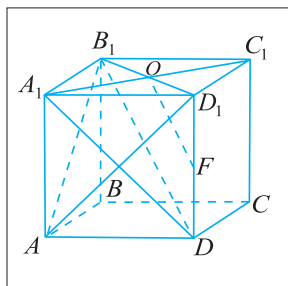
Теорема 2. *Прямая, проведенная в плоскости и перпендикулярная наклонной, перпендикулярна и ее проекции на эту плоскость.*

Доказательство.

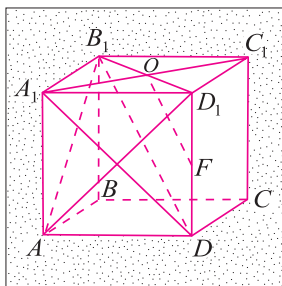
Пусть AO и AM — соответственно перпендикуляр и наклонная, проведенные из точки A к плоскости α , прямая a лежит в плоскости α и перпендикулярна наклонной AM (см. рис. 164, а, б). Докажем, что прямая a перпендикулярна проекции OM . Прямая a перпендикулярна плоскости OAM , так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым OA и AM этой плоскости ($a \perp AM$ по условию, $a \perp OA$, так как $OA \perp \alpha$). Отсюда следует, что прямая a перпендикулярна каждой прямой, лежащей в плоскости AOM , в частности $a \perp OM$.

Теорема доказана.

Задача 1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, точка O — точка пересечения диагоналей грани $A_1 B_1 C_1 D_1$, а F — середина ребра DD_1 . Докажите, что $OF \perp AD_1$.



а)



б)

Рис. 165

Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, $DF = FD_1$,
 $O = A_1 C_1 \cap B_1 D_1$.

Доказать:
 $OF \perp AD_1$.

Доказательство.

1) $A_1 D$ — проекция $B_1 D$ на плоскость $A_1 A D$ и $A_1 D \perp AD_1$. Следовательно, по теореме о трех перпендикулярах $B_1 D \perp AD_1$.

2) $OF \parallel B_1 D$ (так как OF — средняя линия треугольника $B_1 D_1 D$), значит, $OF \perp AD_1$ (рис. 165, а, б).

Теорема 3. Если из одной точки, взятой вне плоскости, проведены к этой плоскости перпендикуляр и две наклонные, то:

- 1) две наклонные, имеющие равные проекции, равны;
- 2) из двух наклонных больше та, проекция которой больше.

Доказательство.

Пусть AO — перпендикуляр к плоскости α , AB и AC — наклонные к этой плоскости (рис. 166, а). По условию $AO \perp \alpha$, следовательно, $AO \perp OB$ и $AO \perp OC$. Из прямоугольных треугольников AOB и AOC найдем $AB = \sqrt{AO^2 + OB^2}$, $AC = \sqrt{AO^2 + OC^2}$. Отсюда:

- 1) если $OB = OC$, то $AB = AC$;
- 2) если $OB < OC$, то $AB < AC$.

Теорема доказана.

Пусть AO и AM — соответственно перпендикуляр и наклонная, проведенные из точки A к плоскости α (см. рис. 166, а). В прямоугольном треугольнике AOM сторона AO является

катетом, а сторона AM — гипотенузой, следовательно, $AO < AM$. Таким образом, перпендикуляр, проведенный из точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к данной плоскости.

Значит, из всех расстояний от точки A до различных точек плоскости α наименьшим является расстояние до основания O перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости α .

Определение. Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к данной плоскости.

Расстояние от точки A до прямой l обозначается $d(A, l)$ (читают: «Расстояние от точки A до прямой l »).

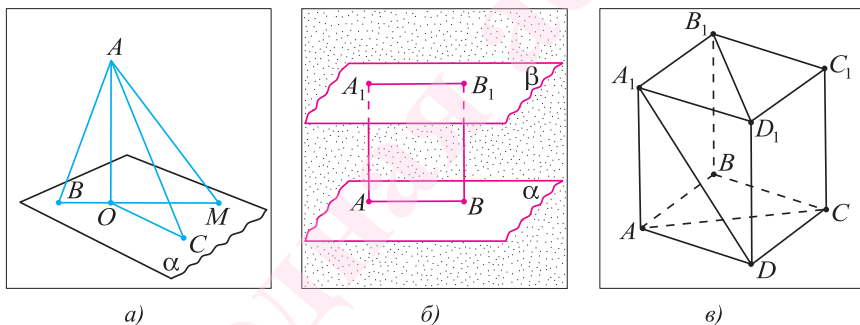


Рис. 166

Пусть α и β — параллельные плоскости. Из любых точек A и B плоскости α проведем к плоскости β перпендикуляры AA_1 и BB_1 (рис. 166, б). Так как $AA_1 \perp \beta$ и $BB_1 \perp \beta$, то $AA_1 \parallel BB_1$. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны, следовательно, $AA_1 = BB_1$. Отсюда следует, что все точки плоскости α находятся на одном и том же расстоянии от плоскости β . Аналогично, все точки плоскости β находятся на том же расстоянии от плоскости α .

Определение. Расстоянием между параллельными плоскостями называется расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости.

Расстояние между параллельными плоскостями α и β обозначается $d(\alpha, \beta)$ (читают: «Расстояние между плоскостями α и β »).

Аналогично, каждая точка прямой, параллельной некоторой плоскости, находится на одном и том же расстоянии от этой плоскости.

Определение. Расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью называется расстояние от произвольной точки прямой до плоскости.

Расстояние между прямой l и параллельной ей плоскостью α обозначается $d(l, \alpha)$ (читают: «Расстояние между прямой l и плоскостью α »).

Если две прямые скрещивающиеся, то через каждую из них проходит единственная плоскость, параллельная другой.

Определение. Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние от одной из скрещивающихся прямых до плоскости, проходящей через другую прямую и параллельной первой прямой.

Расстояние между скрещивающимися прямыми a и b обозначается $d(a, b)$ (читают: «Расстояние между прямыми a и b »).

Например, в прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ расстояние между параллельными плоскостями, в которых лежат грани $AA_1 B_1 B$ и $DD_1 C_1 C$, равно длине ребра AD , так как AD перпендикулярно каждой из указанных плоскостей. Расстояние от прямой $A_1 D$ до параллельной ей плоскости BCC_1 равно длине ребра DC (рис. 166, в).

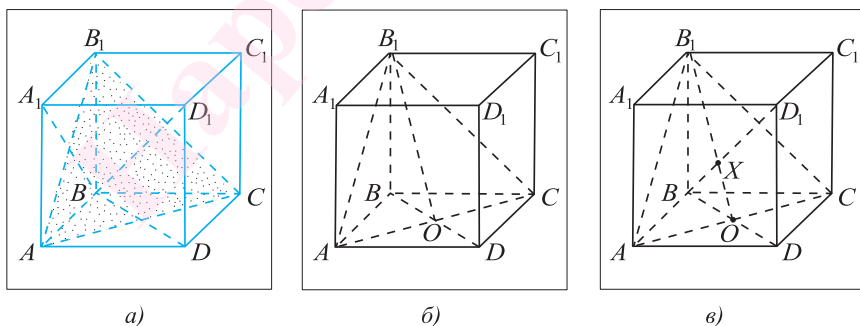


Рис. 167

Задача 2. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. Постройте основание перпендикуляра, проведенного из точки D_1 к плоскости AB_1C .

Решение.

1) Заметим, что A_1B — проекция D_1B на плоскость грани AA_1B_1B и $AB_1 \perp A_1B$, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах $AB_1 \perp D_1B$. Аналогично, DB — проекция D_1B на плоскость грани $ABCD$ и $DB \perp AC$, значит, $AC \perp D_1B$. Таким образом, прямая D_1B перпендикулярна двум пересекающимся прямым B_1A и AC плоскости AB_1C , следовательно, прямая D_1B перпендикулярна плоскости AB_1C (рис. 167, а).

2) Так как $D_1B \perp (AB_1C)$, то искомое основание перпендикуляра есть точка пересечения прямой D_1B с плоскостью AB_1C (см. рис. 167, а).

3) Строим точку $O = AC \cap BD$ (рис. 167, б).

4) Точка $X = D_1B \cap B_1O$ — искомое основание перпендикуляра (точка X лежит в плоскости AB_1C , так как она лежит на прямой B_1O (рис. 167, в)).

Задача 3. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и CD_1 , если длина ребра куба равна a .

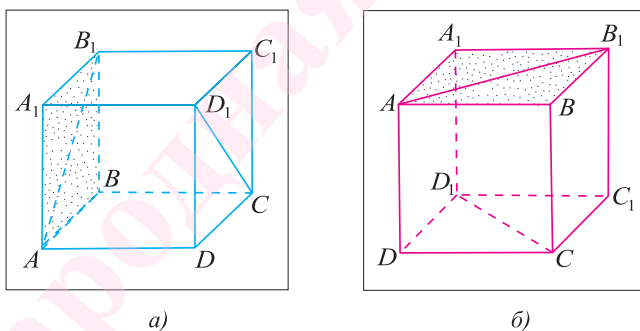


Рис. 168

Решение.

1) Рассмотрим плоскость, проходящую через прямую AB_1 и параллельную прямой CD_1 . Такой плоскостью является плоскость α , в которой лежит грань AA_1B_1B ($A_1B \subset \alpha$, $CD_1 \parallel A_1B$, следовательно, $CD_1 \parallel \alpha$) (рис. 168, а, б).

2) Расстояние между прямыми CD_1 и AB_1 есть расстояние от любой точки прямой CD_1 до плоскости α . Отрезок D_1A_1 — перпендикуляр, проведенный из точки D_1 к плоскости α ($D_1A_1 \perp A_1B_1$, $D_1A_1 \perp AA_1$, значит, $D_1A_1 \perp (AA_1B_1)$), сле-

довательно, его длина a равна расстоянию между прямыми AB_1 и CD_1 . Ответ: $d(AB_1, CD_1) = a$.

Вопросы и задачи к § 2

367. Прямая a — ортогональная проекция прямой b на плоскость α , прямая l лежит в плоскости α и перпендикулярна прямой a . Верно ли утверждение, что прямая l перпендикулярна прямой b ?

368. Прямая p лежит в плоскости β и перпендикулярна прямой b . Каково взаимное расположение прямой p и ортогональной проекции прямой b на плоскость β ?

369. Точка P лежит на прямой l , проходящей через центр окружности и перпендикулярной плоскости, в которой эта окружность лежит. Точки A и B лежат на данной окружности. Верно ли, что отрезки PA и PB равны между собой?

370. Прямые a и b — скрещивающиеся. Плоскость α проходит через прямую b и параллельна прямой a , точка O — произвольная точка прямой a , OF — перпендикуляр, проведенный из точки O к плоскости α . Верно ли, что расстояние между прямыми a и b равно длине отрезка OF ?

371. Из точки A проведены к плоскости α перпендикуляр AO , длина которого равна 4 см, и наклонная $AC = 7$ см. Вычислите длину проекции наклонной AC на плоскость α .

372. Из одной и той же точки под углом φ друг к другу проведены перпендикуляр и наклонная, длина которой a . Найдите длину проекции наклонной.

373. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине C (рис. 169, а). а) Назовите проекцию отрезка CB_1 на плоскость $A_1B_1C_1$. б) Верно ли, что отрезок CB_1 — ортогональная проекция отрезка AB_1 на плоскость грани CC_1B_1B ?

374. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб (рис. 169, б). а) Верно ли, что проекцией диагонали $B_1 D$ на плоскость грани $AA_1 D_1 D$ является отрезок $A_1 D$? б) Найдите длину проекции отрезка $A_1 D$ на плоскость BDD_1 , если длина ребра куба равна a .

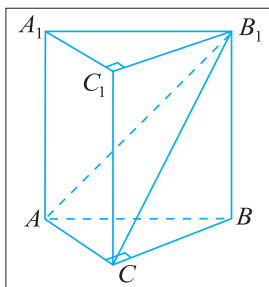
375. Отрезок SO — перпендикуляр, проведенный из точки S к плоскости, в которой лежит треугольник ABC . Известно,

что $SA = SB = SC$. Докажите, что точка O есть центр окружности, описанной около треугольника ABC .

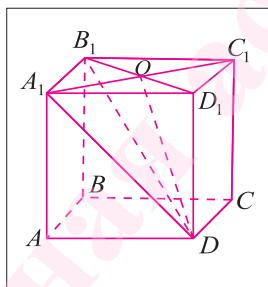
376. В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания, отрезок AF — высота треугольника ABC . Докажите, что SF есть высота треугольника SBC .

377. Прямая OB перпендикулярна плоскости квадрата $ABCD$. Найдите площадь треугольника OAD , если $OB = 8$ см, $AB = 6$ см.

378. Длина бокового ребра правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна 8 см. Вычислите расстояние от вершины S до плоскости основания ABC , если $AB = 12$ см.



а)



б)

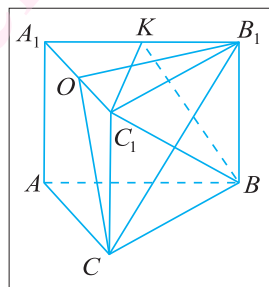


Рис. 170

Рис. 169

379. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, точки K и O — середины ребер A_1B_1 и A_1C_1 соответственно (рис. 170). а) Верно ли, что CO — проекция CB_1 на плоскость грани AA_1C_1C ? б) Вычислите площадь треугольника BC_1K , если $BC = 6$ см, $AA_1 = \sqrt{15}$ см.

380. Основание треугольной пирамиды $SABC$ — прямоугольный треугольник ABC , в котором $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle CAB = 30^\circ$. Вычислите высоту грани ASB , проведенной из вершины S , если длина бокового ребра SC , перпендикулярного плоскости основания, равна 4 см, а $AC = 6$ см.

381. Через вершину A прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) проведена прямая AO , перпендикулярная плоскости треугольника. Вычислите площадь треугольника BCO , если $BC = 2$ см, $CO = 2\sqrt{3}$ см.

382. Из точки O проведен перпендикуляр OA к плоскости прямоугольника $ABCD$. Найдите расстояние от точки O до плоскости данного прямоугольника, если $AD = b$, $DC = a$, а площадь треугольника ODC равна S .

383. Основание треугольной пирамиды $SABC$ — равнобедренный треугольник ABC , а боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Вычислите площадь грани SBC , если $AB = AC = 10$ см, $BC = 12$ см, $AS = 24$ см.

384. Боковое ребро SA четырехугольной пирамиды $SABCD$, основание которой — прямоугольник $ABCD$, перпендикулярно плоскости основания. Вычислите длину ребра SA , если $SD = 12$ см, $SC = 18$ см, $SB = 14$ см.

385. В равнобедренном треугольнике ABC $AC = BC = 2$ см, $\angle ABC = 30^\circ$. Прямая OB перпендикулярна плоскости данного треугольника. Вычислите расстояние от точки O до прямой AC и расстояние от точки B до плоскости AOC , если $OB = 1$ см.

386. Через вершину A квадрата $ABCD$ проведена прямая AO , перпендикулярная его плоскости. Вычислите расстояние от точки O до прямых DB , BC и DC , если $OA = 16$ см, $AB = 8$ см.

387. Основание треугольной пирамиды $SABC$ — равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$). Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды, если $AC = 4$ см, $SC = 2$ см.

388. Катет прямоугольного треугольника ABC равен a , а угол, прилежащий к этому катету, равен α . Через вершину прямого угла C проведена прямая CD , перпендикулярная плоскости этого треугольника. Найдите площадь треугольника DAB , если $DC = b$.

389. Прямая OS перпендикулярна плоскости ромба $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O . Докажите, что расстояния от точки S до прямых, содержащих стороны ромба, равны, и найдите это расстояние, если $SO = a\sqrt{2}$, $AC = 2a$, $BD = a$.

390. Основание четырехугольной пирамиды $OABCD$ — ромб $ABCD$, у которого $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = a$. Боковое ребро OA

пирамиды перпендикулярно плоскости основания. Найдите длину ребра OA и расстояние от точки A до плоскости ODC , если площадь грани ODC равна S .

391. Через вершину B тупого угла параллелограмма $ABCD$ проведена прямая BM , перпендикулярная его плоскости. Вычислите длины сторон параллелограмма, если $AM = 3\sqrt{5}$ см, $MD = MC = 5$ см, $AC = 2\sqrt{22}$ см.

392. Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AB и наклонные AC и AD , проекции которых образуют между собой прямой угол. Вычислите высоту CK треугольника ACD , если $AB = 15$ см, $BC = 16$ см, $BD = 20$ см.

393. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Вычислите расстояние между прямыми $B_1 D$ и $D_1 C$, если длина ребра куба равна 2 см.

394. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O , а прямая MO перпендикулярна плоскости данного параллелограмма. Вычислите высоты параллелограмма, если длины его сторон равны 20 см и 50 см, а расстояния от точки M до прямых, содержащих стороны параллелограмма, равны 17 см и 25 см.

395. Плоскость α проходит через вершину A треугольника ABC и параллельна прямой BC . Отрезки BB_1 и CC_1 — перпендикуляры плоскости α . Вычислите площадь треугольника ABC , если $AB_1 = \sqrt{2}$ см, $AC_1 = \sqrt{3}$ см, $B_1 C_1 = \sqrt{5}$ см, а расстояние от прямой BC до плоскости α равно 3 см.

396. В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SB перпендикулярно плоскости основания пирамиды. Вычислите высоту SD треугольника SAC , если $AB = 10$ см, $BC = 17$ см, $AC = 21$ см, $SB = 15$ см.

397. В равнобедренном треугольнике ABC основание $AB = 6$ см, а боковая сторона $BC = 5$ см. Отрезок OK перпендикулярен плоскости треугольника (где точка O — центр окружности, вписанной в данный треугольник). Вычислите высоту треугольника AKB , проведенную из вершины K , если $OK = 2$ см.

398. В равнобедренном треугольнике ABC основание $AC = 6$ см, а высота $BD = 9$ см. Точка M равноудалена от всех вершин данного треугольника и находится на расстоянии 3 см от плоскости, в которой он лежит. Вычислите расстояние от точки M до вершины C треугольника.

§ 3. Угол между прямой и плоскостью

1. Ортогональная проекция прямой. Пусть в пространстве даны плоскость α и прямая a . **Ортогональной проекцией** прямой a на плоскость α называется проекция этой прямой на плоскость α в случае, если прямая, определяющая направление проектирования, перпендикулярна плоскости α .

Например, если $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, тогда ортогональной проекцией прямой $B_1 D$ на плоскость грани $DCC_1 D_1$ является прямая DC_1 , а ортогональная проекция этой прямой на плоскость основания $ABCD$ куба есть прямая BD (рис. 171, а).

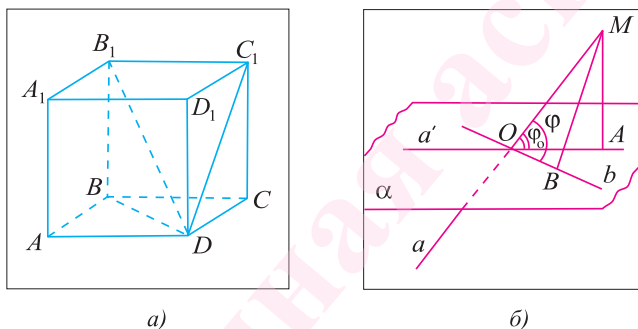


Рис. 171

Дадим определение угла между прямой и плоскостью, при этом воспользуемся понятием ортогональной проекции прямой на плоскость.

Если прямая перпендикулярна плоскости, то ее ортогональная проекция на эту плоскость есть точка пересечения этой прямой с плоскостью. В этом случае угол между прямой и плоскостью считается равным 90° .

2. Угол между прямой и плоскостью. Рассмотрим понятие угла между прямой и плоскостью.

Определение. Углом между прямой, не перпендикулярной плоскости, и плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на данную плоскость.

Теорема. Угол между прямой и плоскостью является наименьшим из всех углов, которые данная прямая об-

разует с прямыми, лежащими в данной плоскости и проходящими через точку пересечения прямой и плоскости.

Доказательство.

Пусть прямая a пересекает плоскость α в точке O , a' — ортогональная проекция прямой a на плоскость α , b — произвольная прямая, лежащая в плоскости α , проходящая через точку O и не совпадающая с прямой a' . Обозначим буквой φ_0 угол между прямыми a и a' , а буквой φ — угол между прямыми a и b . Докажем, что $\varphi_0 < \varphi$ (рис. 171, б).

Если прямые a и b не перпендикулярны, то из точки $M \in a$ проведем перпендикуляры MA и MB к прямым a' и b соответственно. Из прямоугольных треугольников MAO и MBO найдем $\sin \varphi_0 = \frac{MA}{MO}$, $\sin \varphi = \frac{MB}{MO}$. Так как $MA < MB$, то $\sin \varphi_0 < \sin \varphi$. Отсюда следует, что $\varphi_0 < \varphi$ (так как $0 < \varphi \leq 90^\circ$, а функция $y = \sin x$ на указанном промежутке является возрастающей).

Если $a \perp b$, то $\varphi = 90^\circ$, а, значит, $\varphi > \varphi_0$.

Теорема доказана.

Задача. Дан тетраэдр $DABC$. Найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью DBC .

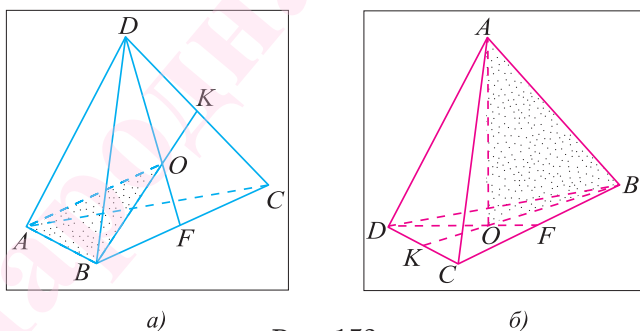


Рис. 172

Решение.

1) Угол между прямой AB и плоскостью DBC равен углу между прямой AB и ортогональной проекцией этой прямой на плоскость DBC .

2) Для построения ортогональной проекции прямой AB на плоскость DBC достаточно построить основание перпендикуляра, проведенного из произвольной точки прямой AB к плоскости DBC (например, из точки A).

3) Если точка O — основание перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости DBC , то $OC = OB = OD$ (проекции равных соответственно наклонных AC , AB , AD). Следовательно, точка O равноудалена от вершин треугольника DBC , а такой точкой в равностороннем треугольнике DBC является точка пересечения медиан BK и DF . Таким образом, прямая BO — перпендикулярная проекция прямой AB на плоскость DBC (рис. 172, а, б).

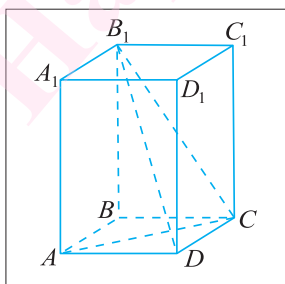
4) Теперь найдем косинус угла между прямой AB и плоскостью DBC . Пусть ребро тетраэдра равно a . В прямоугольном треугольнике AOB ($AB = a$, $\angle AOB = 90^\circ$, $BO = \frac{2}{3}BK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$) $\cos \angle ABO = \frac{OB}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{3} : a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

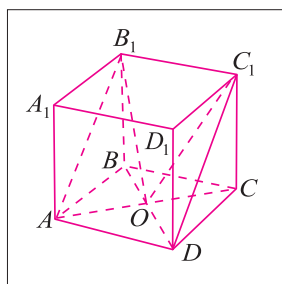
Задачи к § 3

399. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед (рис. 173, а). а) Верно ли, что прямая $B_1 C$ есть ортогональная проекция прямой $B_1 D$ на плоскость грани $BCC_1 B_1$? б) Какая прямая является ортогональной проекцией прямой AC на плоскость грани $DCC_1 D_1$? в) Почему угол между прямыми $B_1 D$ и DC не равен углу между прямой $B_1 D$ и плоскостью DCC_1 ?

400. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ диагонали основания $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 173, б). а) Назовите ортогональную проекцию прямой DC_1 на плоскость диагонального сечения $ACC_1 A_1$. б) Верно ли, что прямая AB_1 является ортогональной проекцией прямой $B_1 O$ на плоскость грани $ABB_1 A_1$?



а)



б)

Рис. 173

401. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. а) Верно ли, что угол между прямой AB_1 и плоскостью грани $BCC_1 B_1$ равен 30° ? б) Найдите синус угла между прямой $B_1 D$ и плоскостью грани $ADD_1 A_1$.

402. Отрезок AM является перпендикуляром к плоскости квадрата $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O . Найдите синус угла φ между прямой MO и плоскостью $MA B$, если $MA = AD$.

403. Отрезок OB перпендикулярен плоскости прямоугольника $ABCD$, $AB = 3$ см, $AD = 4$ см. Вычислите расстояние от точки O до плоскости прямоугольника, если угол между прямой OD и плоскостью ABC равен 30° .

404. Основание четырехугольной пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$, боковое ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания. Прямая SC образует с плоскостью SAB угол φ . Найдите косинус угла между прямой SC и плоскостью $ABCD$, если $DC = a$.

405. Точка T находится на расстоянии a от каждой из вершин квадрата $ABCD$. Найдите угол между прямой BT и плоскостью данного квадрата, если $AD = a$.

406. Отрезок BT перпендикулярен плоскости ромба $ABCD$, $\angle BAC = 60^\circ$. Найдите синус угла между прямой TD и плоскостью TBC , если угол между прямой TD и плоскостью, в которой лежит ромб, равен 45° .

407. Из точки O , находящейся на расстоянии a от плоскости α , проведены к этой плоскости наклонные OA и OB , каждая из которых образует с плоскостью α угол 30° . Проекции наклонных на плоскость образуют угол 120° . Найдите AB .

408. Основание треугольной пирамиды $DABC$ — прямоугольный треугольник ABC ($\angle ABC = 90^\circ$), боковое ребро DB перпендикулярно плоскости ее основания. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если $DB = a$, а прямые DA и DC образуют с плоскостью основания углы 30° и 45° соответственно.

409. Основание треугольной пирамиды $DABC$ — равнобедренный треугольник ABC ($AB = CB$), боковое ребро DB пира-

миды перпендикулярно плоскости ее основания. Вычислите радиус окружности, вписанной в основание пирамиды, если $AD = 11$ см, $AC = 10$ см, а высота DK грани DAC образует с плоскостью основания угол 60° .

410. Боковое ребро SA четырехугольной пирамиды, основание которой — прямоугольник $ABCD$, перпендикулярно плоскости ее основания. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника SAC , если $SB = 2$ см, а боковые ребра SB и SD образуют с плоскостью основания углы 30° и 45° соответственно.

411. Из точки O к плоскости α проведены равные наклонные OA и OB , угол между которыми равен 60° , а угол между их проекциями на эту плоскость равен 90° . Вычислите углы между наклонными и плоскостью α .

412. Из некоторой точки проведены к плоскости две наклонные, образующие с этой плоскостью углы 45° и 60° . Вычислите длину каждой наклонной, если расстояние между основаниями наклонных равно 1 см, а угол между их проекциями на плоскость равен 30° .

413. В равнобедренном треугольнике ABC $AC = CB = 1$ см, $\angle BAC = 30^\circ$. Отрезок OC , длина которого равна $\sqrt{2}$ см, перпендикулярен плоскости ABC . Найдите угол между прямой OA и плоскостью OBC .

414. Из точки C к плоскости α проведены наклонные CA и CB , перпендикулярные между собой и образующие с плоскостью α углы 30° и 45° соответственно. Вычислите угол, образованный с плоскостью α перпендикуляром, проведенным из точки C к прямой AB .

§ 4. Двугранный угол.

Перпендикулярность плоскостей

1. Двугранный угол. Пусть прямая a лежит в плоскости, тогда можно указать две части этой плоскости, каждая из которых вместе с прямой a называется полуплоскостью. Прямая a называется граничной для каждой из полуплоскостей (рис. 174, а). Две полуплоскости с общей граничной прямой l , расположенные в пространстве, могут не лежать в одной плоскости (рис. 175, б).

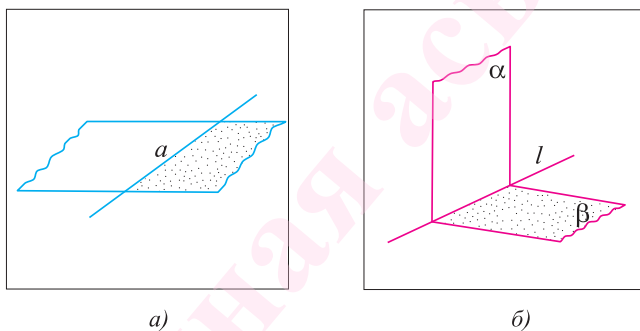


Рис. 174

Определение. Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой и частью пространства, для которой эти полуплоскости служат границей.

Полуплоскости называются *гранями* двугранного угла, общая граничная прямая l полуплоскостей называется *ребром* двугранного угла (см. рис. 174, б).

Если грани двугранного угла лежат в одной плоскости, то он называется *развернутым*.

2. Линейный угол двугранного угла. Для измерения двугранного угла вводится понятие его линейного угла. Пусть точка O лежит на ребре l двугранного угла (рис. 175, а). В каждой грани проведем лучи OA и OB перпендикулярно ребру l . Угол AOB , сторонами которого служат лучи OA и OB , называется линейным углом данного двугранного угла.

Определение. *Линейным углом двугранного угла называется угол, сторонами которого являются лучи с общим началом на ребре двугранного угла, которые проведены в его гранях перпендикулярно ребру.*

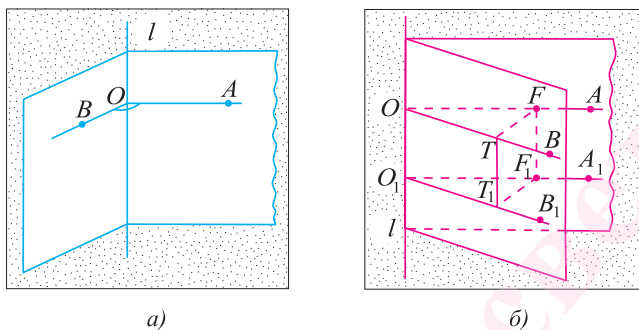


Рис. 175

Пусть AOB — линейный угол двугранного угла, ребро которого l (см. рис. 175, а). Так как $OA \perp l$, $OB \perp l$, то плоскость, в которой лежат лучи OA и OB , перпендикулярна прямой l . Таким образом, линейный угол двугранного угла — это угол, образованный пересечением двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.

Все линейные углы двугранного угла равны между собой. Действительно, рассмотрим два линейных угла AOB и $A_1O_1B_1$ двугранного угла, ребро которого l . Лучи OA и O_1A_1 лежат в одной грани и перпендикулярны ребру l , следовательно, $OA \parallel O_1A_1$. Аналогично $OB \parallel O_1B_1$ (рис. 175, б). Отложим на лучах OA и O_1A_1 равные отрезки OF и O_1F_1 соответственно, а на лучах OB и O_1B_1 равные отрезки OT и O_1T_1 соответственно. Так как $OF = O_1F_1$ и $OF \parallel O_1F_1$, то четырехугольник OFF_1O_1 — параллелограмм. Поэтому $OO_1 = FF_1$, $OO_1 \parallel FF_1$. Аналогично, $OO_1 = TT_1$ и $OO_1 \parallel TT_1$. В результате $FF_1 = TT_1$ и $FF_1 \parallel TT_1$, т. е. четырехугольник TFF_1T_1 — параллелограмм. Следовательно, $TF = T_1F_1$. Таким образом, треугольники OFT и $O_1F_1T_1$ равны по трем сторонам, значит, $\angle FOT = \angle F_1O_1T_1$, т. е. $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$.

Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.

Двугранный угол называется прямым (острым, тупым), если его градусная мера равна 90° (меньше 90° , больше 90°).

На рисунке 176, а, б изображены соответственно острый и тупой двугранные углы.

В дальнейшем под двугранным углом будем понимать всегда тот, линейный угол φ которого удовлетворяет условию $0 < \varphi < 180^\circ$.

Вместо «двугранный угол, градусная мера которого равна α » можно говорить «двугранный угол, равный α ».

Двугранный угол, ребро которого есть прямая AB , а гранями являются полуплоскости α и β , обозначается $\alpha AB \beta$ (или $TABE$, если на разных его гранях отмечены точки T и E).

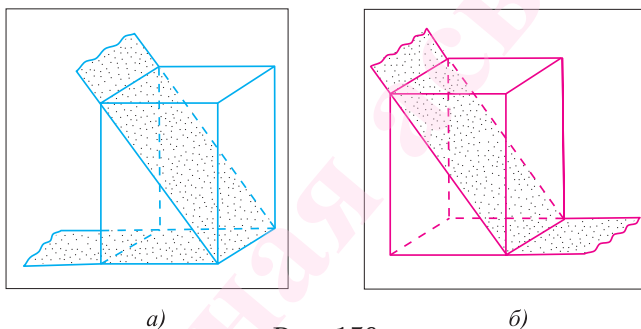


Рис. 176

Рассмотрим примеры. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед. Тогда $\angle ADD_1$ является линейным углом двугранного угла, ребро которого есть прямая DC , а его грани — полуплоскости, в которых лежат прямоугольники $ABCD$ и $DCC_1 D_1$ (так как $AD \perp DC$ и $DD_1 \perp DC$). Угол ADD_1 — прямой, следовательно, указанный двугранный угол прямой (рис. 177, а).

Двугранным углом при ребре многогранника называется двугранный угол, ребро которого содержит ребро многогранника, а грани двугранного угла содержат грани многогранника, которые пересекаются по данному ребру многогранника.

Пусть $DABC$ — правильная треугольная пирамида, а точка O — середина отрезка AC . Угол DOB есть линейный угол двугранного угла $DACB$, ребро которого — прямая AC , а гранями являются полуплоскости, содержащие треугольники ABC и ACD (так как $DO \perp AC$ и $BO \perp AC$) (рис. 177, б).

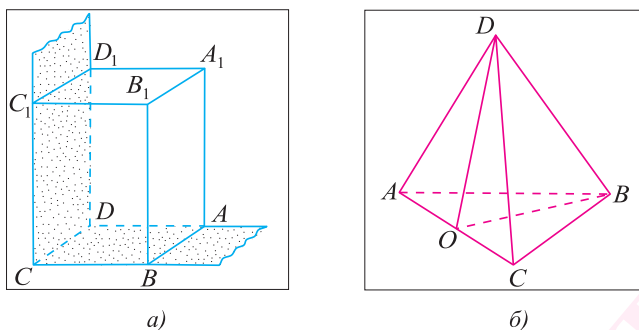


Рис. 177

3. Угол между плоскостями. Введем понятие угла между плоскостями.

Определение. Углом между пересекающимися плоскостями называется угол между прямыми, проведенными соответственно в плоскостях перпендикулярно их линии пересечения через некоторую ее точку.

Заметим, что определение угла между плоскостями не зависит от выбора прямых a и b , проведенных в плоскостях и перпендикулярных их линии пересечения. Действительно, если в данных плоскостях провести какие-нибудь другие прямые a_1 и b_1 перпендикулярно их линии пересечения l через точку O_1 , то $a \parallel a_1$ и $b \parallel b_1$, а, следовательно, угол между прямыми a и b равен углу между прямыми a_1 и b_1 (рис. 178, а, б).

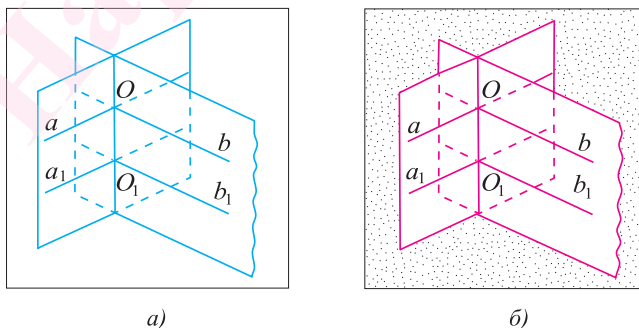
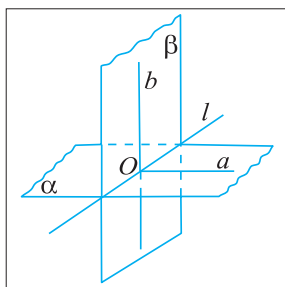


Рис. 178

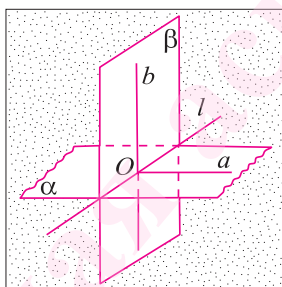
Если плоскости параллельны, то угол между ними считается равным 0° . Угол между плоскостями α и β обозначается $\angle(\alpha, \beta)$. Из определения следует, что угол между пересекающимися плоскостями удовлетворяет условию $0^\circ < \angle(\alpha, \beta) \leq 90^\circ$.

Определение. Две плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° .

Теорема 1 (признак перпендикулярности плоскостей). Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.



a)



б)

Рис. 179

Дано:

прямая b лежит
в плоскости β ,
 $b \perp \alpha$
(рис. 179, а, б).

Доказать:
 $\beta \perp \alpha$.

Доказательство.

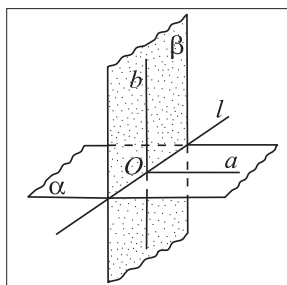
1) Пусть точка O — точка пересечения прямой b с плоскостью α . Точка O — общая точка плоскостей α и β , следовательно, данные плоскости пересекаются по прямой l , проходящей через точку O .

2) В плоскости α через точку O проведем прямую a , перпендикулярную прямой l .

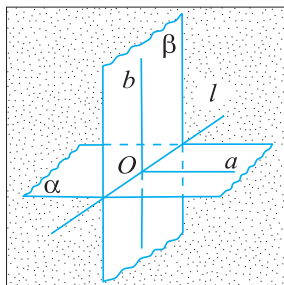
3) Прямые a и l лежат в плоскости α и по условию $b \perp \alpha$, следовательно, $b \perp a$ и $b \perp l$. Таким образом, $b \subset \beta$, $b \perp l$ и $a \subset \alpha$, $a \perp l$, значит, $\angle(\alpha, \beta) = \angle(a, b) = 90^\circ$, т. е. $\beta \perp \alpha$.

Теорема доказана.

Теорема 2. Прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная прямой, по которой они пересекаются, перпендикулярна другой плоскости.



а)



б)

Рис. 180

Дано:

$\beta \perp \alpha$, $\beta \cap \alpha = l$,
 $b \subset \beta$, $b \perp l$.

Доказать:

$b \perp \alpha$.

Доказательство.

1) Обозначим буквой O точку пересечения прямой b с прямой l (рис. 180, а, б).

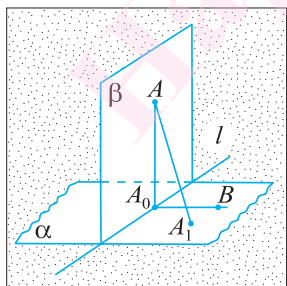
2) Проведем в плоскости α через точку O прямую a перпендикулярно прямой l .

3) Прямые a и b перпендикулярны прямой l , по которой пересекаются плоскости α и β . Следовательно, угол между прямыми a и b равен углу между плоскостями α и β , значит, равен 90° .

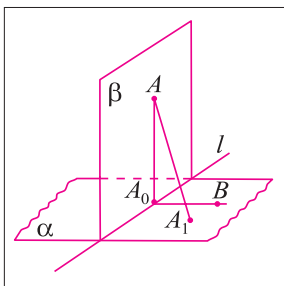
4) Таким образом, прямая b перпендикулярна пересекающимся прямым a и l плоскости α . Следовательно, $b \perp \alpha$.

Теорема доказана.

Задача 1. Докажите, что прямая, проведенная через точку одной из перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная другой плоскости, лежит в первой плоскости.



а)



б)

Рис. 181

Дано:

$\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = l$,
 $A \in \beta$, $AA_1 \perp \alpha$.

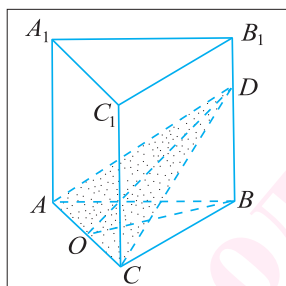
Доказать:

$AA_1 \subset \beta$.

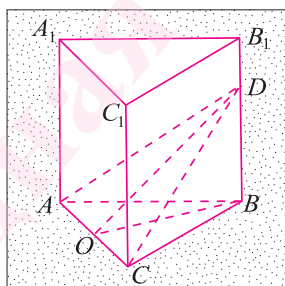
Доказательство.

Предположим, что прямая AA_1 не лежит в плоскости β (рис. 181, а, б). Проведем в плоскости β прямую $AA_0 \perp l$, а в плоскости α проведем $BA_0 \perp l$. Тогда $\angle AA_0B$ есть линейный угол двугранного угла $\alpha\beta$. Так как $\alpha \perp \beta$, то $\angle AA_0B = 90^\circ$, т. е. $AA_0 \perp BA_0$. Прямая AA_0 перпендикулярна двум пересекающимся прямым l и BA_0 , лежащим в плоскости α , значит, $AA_0 \perp \alpha$. Это противоречит существованию единственной прямой, проходящей через точку и перпендикулярной плоскости. Предположение, что прямая AA_1 не лежит в плоскости β , неверное, а значит, прямая AA_1 лежит в плоскости β .

Задача 2. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC , в котором $AB = BC = 7$ см, $AC = 2$ см. Через прямую AC проведена плоскость α под углом 30° к плоскости ABC , пересекающая боковое ребро BB_1 в точке D . Вычислите площадь полученного сечения (рис. 182, а, б).



а)



б)

Рис. 182

Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ —
прямая треуголь-
ная призма,
 $AC \subset \alpha$,
 $\angle(\alpha, ABC) = 30^\circ$,
 $AB = BC = 7$ см,
 $AC = 2$ см.

Найти:
S сечения.

Решение.

1) В треугольнике ADC сторона $AC = 2$ см. Для нахождения его площади необходимо найти высоту, проведенную к стороне AC (см. рис. 182, а, б).

2) $DB \perp (ABC)$ (так как призма прямая, то $DB \perp AB$ и $DB \perp BC$). Кроме того, $CD = AD$ (наклонные, имеющие равные проекции CB и AB).

3) Пусть точка O — середина отрезка AC , тогда медиана DO — высота равнобедренного треугольника ADC , а $\angle DOB = 30^\circ$ (так как $DO \perp AC$ и $BO \perp AC$).

4) В треугольнике BOC длина катета $BO = \sqrt{BC^2 - OC^2} = \sqrt{49 - 1} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ (см).

5) В треугольнике OBD ($\angle OBD = 90^\circ$, $\angle DOB = 30^\circ$, $BO = 4\sqrt{3}$ см) длина гипотенузы $OD = \frac{OB}{\cos 30^\circ} = \sqrt{48} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 8$ (см).

6) Теперь найдем $S_{ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot OD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = 8$ (см²).

Ответ: 8 см².

Задача 3. Докажите, что площадь $S_{\text{орт}}$ ортогональной проекции треугольника ABC на плоскость равна произведению его площади S на косинус угла φ между плоскостью треугольника и плоскостью проекции: $S_{\text{орт}} = S \cos \varphi$.

Задачи к § 4

415. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб (рис. 183). а) Верно ли, что $\angle BDB_1$ является линейным углом двугранного угла $B_1 ADB$? б) Докажите, что $\angle B_1 AB$ есть линейный угол двугранного угла $B_1 ADB$. в) Найдите градусную меру двугранного угла $D_1 CBA$.

416. $DABC$ — правильная треугольная пирамида, точка O — середина ребра BC . а) Верно ли, что $\angle ACD$ является линейным углом двугранного угла $ACBD$? б) Докажите, что $\angle AOD$ есть линейный угол двугранного угла $ACBD$.

417. ABC — равнобедренный треугольник, $AB = BC$. Отрезок OB перпендикулярен плоскости ABC , точка K — середина стороны AC (рис. 184). а) Являются ли углы OCB и OAB линейными углами двугранного угла $OACB$? б) Докажите, что $\angle OKB$ есть линейный угол двугранного угла $OACB$.

418. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ диагональ $A_1 C$ образует с плоскостью основания угол 30° . Вычислите градусную меру двугранного угла $A_1 CDA$, если $CD = 4$ см, $AD = 2\sqrt{2}$ см.

419. Сторона BC треугольника ABC лежит в плоскости α , отрезок AF — высота треугольника ABC . Точка O — основание перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости α . Докажите, что угол AFO — линейный угол двугранного угла $ABCO$ (рис. 185).

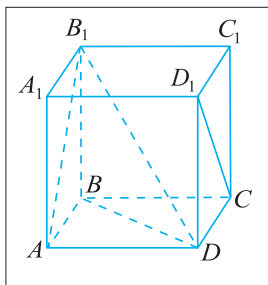


Рис. 183

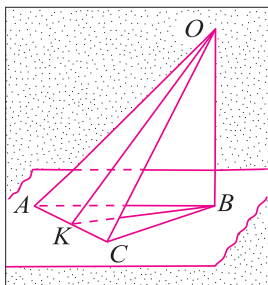


Рис. 184

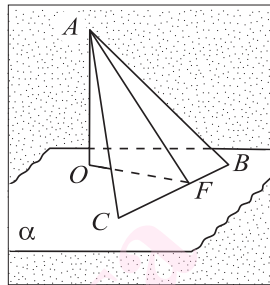


Рис. 185

420. Катет BC прямоугольного треугольника ABC ($\angle ABC = 90^\circ$) лежит в плоскости α . Точка O — основание перпендикуляра, проведенного из вершины A к плоскости α . Двугранный угол $ABCO$ равен 45° . Вычислите градусную меру угла между прямой AC и плоскостью α , если $BC = 2$ см, $AO = \sqrt{2}$ см.

421. В треугольной пирамиде $DABC$ боковое ребро DB перпендикулярно плоскости основания, а грань ADC — прямоугольный треугольник ($\angle DCA = 90^\circ$). Вычислите площадь основания пирамиды, если угол между плоскостями ADC и ABC равен 30° , $AC = 8$ см, $AD = 10$ см.

422. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle ABC = 90^\circ$). Двугранный угол C_1ABC равен 60° . Вычислите площадь сечения призмы плоскостью ABC_1 , если $AC = 4\sqrt{2}$ см.

423. Длины катетов прямоугольного треугольника 6 см и 8 см. Вычислите расстояние от вершины прямого угла данного треугольника до плоскости, которая проходит через гипотенузу и образует угол 30° с плоскостью треугольника.

424. Прямая OB перпендикулярна плоскости параллелограмма $ABCD$, отрезок BK — высота данного параллелограмма (рис. 186). а) Верно ли, что угол OAB является линейным углом двугранного угла $OADB$? б) Докажите, что $\angle OKB$ является линейным углом двугранного угла $OADB$.

425. Дан двугранный угол $\alpha l \beta$. В грани β из точки A проведен перпендикуляр AB к ребру l . Из этой же точки A проведен перпендикуляр AC к плоскости, содержащей грань α ,

причем $C \in \alpha$. Докажите, что $\angle ABC$ есть линейный угол данного двугранного угла.

426. Сторона AD ромба $ABCD$ лежит в плоскости α , образующей с плоскостью ромба угол 60° . Вычислите длину стороны ромба, если $\angle ABD = 45^\circ$, а расстояние от вершины B ромба до плоскости α равно $\sqrt{3}$ см.

427. Вершина B ромба $ABCD$ является основанием перпендикуляра, проведенного из точки O к плоскости, в которой лежит ромб. Вычислите расстояние от точки O до плоскости ABC , если угол BAD равен 45° , $AB = 2$ см, двугранный угол $OADB$ равен 60° .

428. В ромбе $ABCD$ сторона $AB = 20$ см, $\angle BAD = 45^\circ$, точка E — основание перпендикуляра, проведенного из вершины B к плоскости α , содержащей сторону AD . Вычислите расстояние от точки E до плоскости ABC , если двугранный угол $BADE$ равен 60° .

429. Основание прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелограмм $ABCD$, площадь которого 40 см². Вычислите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ADB_1 , если известно, что она образует с плоскостью основания угол 60° .

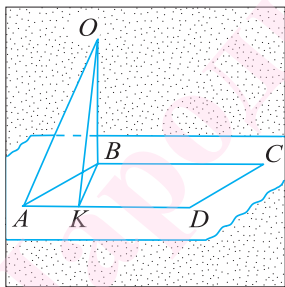


Рис. 186

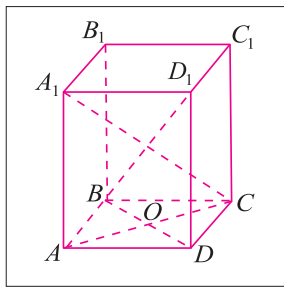


Рис. 187

430. Основание треугольной пирамиды $DABC$ — прямоугольный треугольник ACB с прямым углом при вершине C , $DA \perp (ABC)$. Вычислите градусную меру двугранного угла $ABCD$ и площадь грани DCB , если $AC = BC = 1$ см, $DB = \sqrt{5}$ см.

431. Докажите, что плоскость, перпендикулярная прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна каждой из этих плоскостей.

432. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямой параллелепипед, основание которого — ромб $ABCD$ (рис. 187). а) Докажите, что плоскость, содержащая грань $BCC_1 B_1$, перпендикулярна плоскости ABC . б) Верно ли, что плоскости BDD_1 и $A_1 AC$ взаимно перпендикулярны? в) Докажите, что плоскость BDD_1 перпендикулярна плоскости основания.

433. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ боковая грань $DD_1 C_1 C$ — квадрат. Докажите, что плоскости BCD_1 и $DC_1 B_1$ перпендикулярны.

434. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основание $ABCD$ — квадрат. Точка E делит отрезок AC в отношении $1 : 3$, считая от вершины A . Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку E и перпендикулярной плоскостям ABC и $A_1 AC$, если $BC = 1$ см, $AC_1 = \sqrt{6}$ см. Вычислите площадь этого сечения.

435. Плоскости α и β пересекаются по прямой l . Из точки O проведены перпендикуляры OA и OB к плоскостям α и β соответственно. Прямая l пересекает плоскость OAB в точке C . Докажите, что $OC \perp l$.

436. $TABCD$ — четырехугольная пирамида, основание которой — квадрат $ABCD$. Боковое ребро TB перпендикулярно плоскости основания, а точка O — середина ребра TC . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через прямую DO и перпендикулярной плоскости основания, если $TB = BC = a$.

437. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, а их длины равны a . Найдите косинус угла, образованного плоскостью боковой грани с плоскостью основания.

438. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, точка F — середина бокового ребра SC . Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую DF и перпендикулярной плоскости SBD .

439. Точки K и M — середины ребер SC и AC тетраэдра $SABC$ соответственно. Найдите угол между плоскостями ABK и SBM .

440. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки T и K — середины ребер CC_1 и DC соответственно. Найдите угол между плоскостями ATD и $A_1 D_1 K$.

441. Центр равностороннего треугольника ABC является основанием перпендикуляра, проведенного из точки D к плоскости этого треугольника. Найдите косинус угла между плоскостями ABC и ABD , если треугольник ABD равносторонний.

442. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$. Боковое ребро SB перпендикулярно плоскости основания и $BS = 1$ см, $BC = 2$ см. На ребре SC взята точка O так, что $CO : OS = 1 : 3$. Постройте сечение пирамиды плоскостью ABO и найдите тангенс угла между плоскостью ABO и плоскостью основания пирамиды.

443. Вершина C треугольника ABC является ортогональной проекцией вершины D треугольника ABD . Докажите, что площадь треугольника ABC равна $S \cos \varphi$, где S — площадь треугольника ABD , φ — угол между плоскостями ABD и ABC .

444. Точки A и B лежат на ребре двугранного угла, AC и BD — перпендикуляры к ребру, проведенные в разных его гранях. Найдите двугранный угол, если $AB = 24$ см, $AC = 8$ см, $BD = 5$ см и расстояние между точками C и D равно 25 см.

445. Точки A и B лежат на ребре данного двугранного угла, равного 120° . Отрезки AC и BD проведены в разных его гранях и перпендикулярны к ребру двугранного угла. Вычислите длину отрезка CD , если $AB = AC = BD = 3$ см.

446. Дан треугольник ABC , у которого $AB = BC = 3$ см, $AC = 4$ см. Сторона AB лежит в плоскости α , а проекции двух других сторон треугольника на эту плоскость относятся как $1 : 2$. Найдите двугранный угол, образованный плоскостью α и плоскостью ABC .

447. Найдите двугранный угол, грани которого содержат две боковые грани правильной четырехугольной пирамиды, длина бокового ребра которой равно 3 см, а стороны основания — $2\sqrt{3}$ см.

448. Длина бокового ребра правильной треугольной призмы равна 3 см, а стороны основания — 2 см. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через боковое ребро призмы и перпендикулярной противоположащей грани, и вычислите расстояние от точки пересечения диагоналей этого сечения до вершины призмы, не лежащей в сечении.

ИЗОБРАЖЕНИЕ ФИГУР

§ 1. Параллельное проектирование

Для изображения на плоскости (например, на листе бумаги) геометрических фигур, расположенных в пространстве, используется параллельное проектирование. Определяется оно следующим образом.

Пусть α — некоторая плоскость, а l — некоторая прямая, пересекающая эту плоскость. Возьмем в пространстве произвольную точку X . Если точка X не лежит на прямой l , то проведем через точку X прямую, параллельную прямой l , и обозначим через X' точку пересечения этой прямой с плоскостью α . Если точка X лежит на прямой l , то обозначим через X' точку пересечения прямой l с плоскостью α .

Точка X' называется проекцией точки X на плоскость α при проектировании параллельно прямой l (или параллельной проекцией точки X).

Плоскость α называется *плоскостью проекций*, а о прямой l говорят, что она задает *направление проецирования* (рис. 188, а). Все прямые, параллельные прямой l , задают одно и то же направление проектирования, поэтому также называются *проектирующими прямыми*.

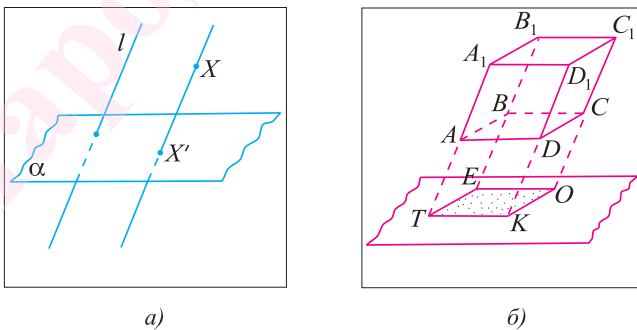


Рис. 188

Пусть F — плоская или пространственная фигура. **Проекцией фигуры F на плоскость α при проектировании параллельно прямой l называется множество F' проекций**

всех точек фигуры F . Например, если плоскость α параллельна основанию $ABCD$ параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, а прямая l параллельна прямой AA_1 , то проекцией параллелепипеда на плоскость α является параллелограмм $TEOK$ (рис. 188, б).

Заметим, что проекция заданной фигуры зависит от выбора плоскости проекций и проектирующей прямой.

Сформулируем и докажем основные свойства параллельного проектирования при условии, что проектируемые отрезки и прямые не параллельны прямой, задающей направление проектирования.

Свойство 1. Проекция прямой есть прямая, а проекция отрезка — отрезок.

Доказательство.

Пусть b — некоторая прямая, непараллельная прямой l , которая задает направление проектирования. Не ограничивая общности, можем считать, что прямые b и l пересекаются. Через прямые b и l проходит единственная плоскость β . Она пересекает плоскость α по некоторой прямой b' . Эта прямая и является проекцией прямой b на плоскость α . Действительно, пусть точка $X \in b$, а точка X' — ее проекция на плоскость α . Тогда проектирующая прямая XX' лежит в плоскости β . Плоскость β пересекает α по прямой b' , следовательно, точка X' лежит на прямой b' . Кроме того, каждая точка прямой b' является проекцией некоторой точки прямой b . Таким образом, прямая b' — проекция прямой b (рис. 189, а, б).

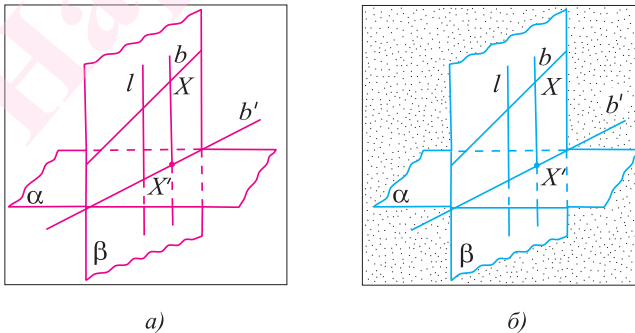


Рис. 189

Теперь нетрудно понять, что проекция отрезка есть отрезок.

Свойство 2. Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.

Доказательство.

Пусть даны две параллельные прямые b и c . Возможны два случая.

1) Некоторая проектирующая прямая a пересекает обе прямые b и c . В этом случае прямая a , а также все остальные проектирующие прямые, пересекающие прямые b и c , лежат в одной плоскости β , проходящей через параллельные прямые b и c . Но тогда по свойству 1 проекцией прямой b и прямой c будет прямая b' , по которой пересекаются плоскости β и α (рис. 190, а).

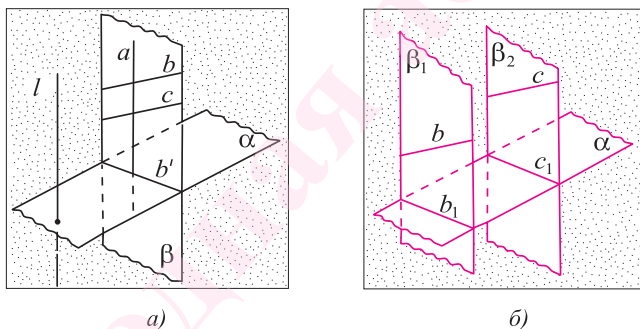


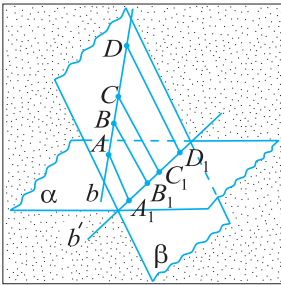
Рис. 190

2) Не существует проектирующих прямых, пересекающих прямые b и c одновременно. Пусть β_1 — плоскость, в которой лежат все прямые, проектирующие точки прямой b на плоскость α , а β_2 — плоскость, в которой лежат прямые, проектирующие точки прямой c на плоскость α . Плоскости β_1 и β_2 параллельны, следовательно, проекции b_1 и c_1 прямых b и c параллельны как линии пересечения параллельных плоскостей β_1 и β_2 с плоскостью α (рис. 190, б).

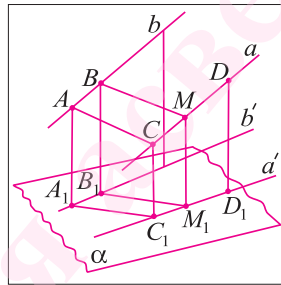
Свойство 3. Отношение длин проекций отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению длин самих отрезков.

Доказательство.

1) Пусть отрезки AB и CD лежат на одной прямой b , а прямая b' — проекция прямой b на плоскость α параллельно прямой l (рис. 191, а). Проекции A_1B_1 и C_1D_1 отрезков AB и CD лежат на прямой b' . Проектирующие прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 параллельны между собой и лежат в одной плоскости β ($b' = \beta \cap \alpha$). Из планиметрии известно, что параллельные прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 отсекают от двух прямых b и b' плоскости β пропорциональные отрезки, т. е. $AB : CD = A_1B_1 : C_1D_1$.



а)



б)

Рис. 191

Пусть отрезки AB и CD лежат на параллельных прямых b и a (рис. 191, б). Проведем прямую AC и через точку B , параллельную ей прямую, которая пересекает прямую a в некоторой точке M . Четырехугольник $ABMC$ — параллелограмм. Рассмотрим случай, когда его проекция на плоскость α есть параллелограмм $A_1B_1M_1C_1$. Тогда $AB = CM$, $A_1B_1 = C_1M_1$. По доказанному $CM : CD = C_1M_1 : C_1D_1$. Таким образом, $AB : CD = A_1B_1 : C_1D_1$.

Если проекция параллелограмма $ABMC$ есть отрезок (в случае, когда проекции прямых a и b совпадают), доказательство данного свойства еще проще.

Следствие. При параллельном проектировании середина отрезка проектируется в середину его проекции.

§ 2. Изображение фигур

Рассмотренные в предыдущем параграфе свойства параллельного проектирования применяются при выполнении рисунков (изображений фигур), иллюстрирующих теоремы и задачи стереометрии.

Изображением фигуры F называется любая фигура, подобная проекции этой фигуры на некоторую плоскость.

Выполняя изображения фигур, расположенных в пространстве, необходимо учитывать свойства, сохраняющиеся при параллельном проектировании, а в остальном изображение может быть произвольным. Важно только, чтобы изображения рассматриваемых фигур были наглядными и давали верное представление о них.

При различном выборе плоскости проекций и направления проектирования получаются различные проекции данной фигуры, а значит, и различные ее изображения. Например, изображениями куба являются фигуры, данные на рисунке 192, *а*, *б*, *в*, *г*.

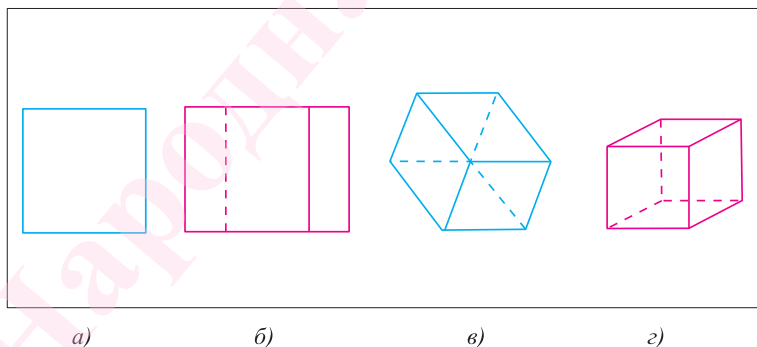


Рис. 192

Изображение куба, данное на рисунке 192, *а*, не дает представления о кубе, наглядным является изображение, данное на рисунке 192, *г*. При построении изображений плоских фигур, расположенных в пространстве, предполагается, что плоскости рассматриваемых фигур не параллельны направлению проектирования.

1. В качестве изображения данного треугольника можно взять произвольный треугольник.

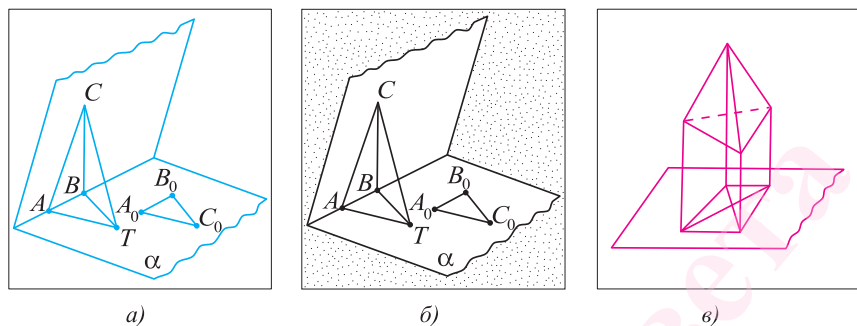


Рис. 193

Действительно, пусть даны два треугольника ABC и $A_0B_0C_0$ (рис. 193, а, б). Обозначим плоскость α , проходящую через прямую AB , а ABT — треугольник в этой плоскости, подобный треугольнику $A_0B_0C_0$. Тогда при проектировании на плоскость α параллельно прямой CT треугольник ABC проектируется на треугольник ABT так, что его проекция будет подобна треугольнику $A_0B_0C_0$. В частности, за изображение прямоугольного, равнобедренного, равностороннего треугольников можно принять любой треугольник.

2. В качестве изображения данного параллелограмма можно взять произвольный параллелограмм.

В самом деле, проекциями равных параллельных отрезков являются равные параллельные отрезки, следовательно, изображением параллелограмма является параллелограмм. В частном случае за изображение прямоугольника, квадрата, ромба можно принять любой параллелограмм.

3. При изображении пространственных фигур пользуются тем фактом, что *фигуру, состоящую из сторон и диагоналей любого выпуклого или невыпуклого четырехугольника, можно считать изображением треугольной пирамиды* при определенном выборе направления проектирования и плоскости, на которую проектируется эта пирамида (рис. 193, в).

Например, фигуры, изображенные на рисунке 194, а, б, в, являются изображениями треугольной пирамиды при соответствующем выборе направления проектирования.

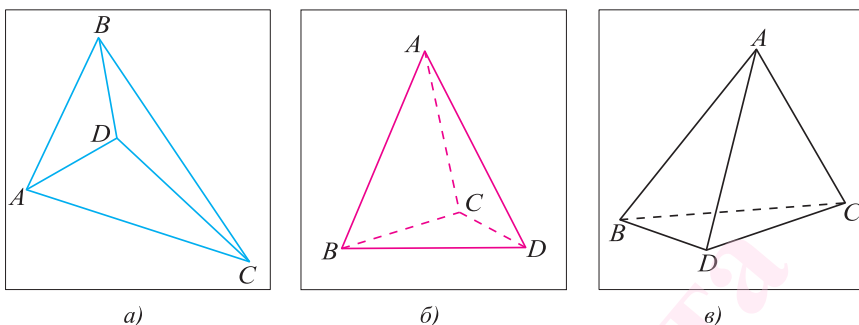


Рис. 194

Для построения изображения параллелепипеда $A_0B_0C_0D_0A'_0B'_0C'_0D'_0$ можно воспользоваться тем, что точки A_0, B_0, D_0, A'_0 являются вершинами треугольной пирамиды $A_0B_0D_0A'_0$. В качестве изображения этих вершин можно взять вершины произвольного четырехугольника $ABDA_1$, т.е. три отрезка AB, AD и AA_1 в плоскости изображения с общим концом A , никакие два из которых не лежат на одной прямой, можно принять за изображение ребер A_0B_0, A_0D_0 и $A_0A'_0$ параллелепипеда. Изображения остальных ребер параллелепипеда строятся с использованием свойств, которые сохраняются при параллельном проектировании (все грани параллелепипеда являются параллелограммами, следовательно, их изображения — параллелограммы). На рисунке 195, б, в даны различные изображения параллелепипеда $A_0B_0C_0D_0A'_0B'_0C'_0D'_0$ (рис. 195, а).

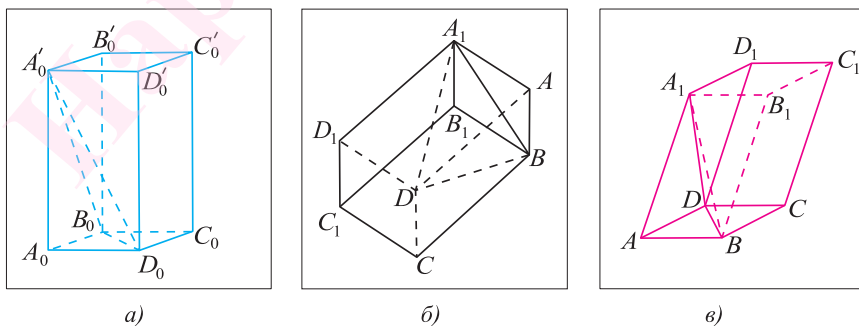


Рис. 195

ОТВЕТЫ

Глава 1

§ 1

2. Да. 3. Да. 14. Да. 15. Да. 16. Да. 19. 24 см^2 . 20. $\frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$.
21. $\sqrt{10} \text{ см}$. 26. $\frac{48}{49}(9 - 4\sqrt{2}) \text{ см}^2$. 27. $2(5 + 3\sqrt{2}) \text{ см}$. 30. $9\sqrt{3} \text{ см}^2$.
31. 7 см . 32. $4(3 + \sqrt{2}) \text{ см}$. 33. 6 см^2 . 34. 20 см . 35. 4 см^2 .
38. 240 см^2 . 39. $24\sqrt{15} \text{ см}^2$. 40. 4 см^2 . 41. 192 см^2 . 42. 13 см ,
 $\sqrt{41} \text{ см}$. 43. 2 см . 44. а) 216 см^2 ; б) 512 см^3 . 45. $64\sqrt{3} \text{ см}^2$.
46. $\frac{8\sqrt{15}}{15} \text{ см}$.

§ 2

56. а) Например, DB, TF, CF, AF, OF ; в) да; г) например, AD, DB, AB, AF, TB, TF . 58. а) Точка O ; б) по прямой OD .
60. а) Плоскости ABT и TBC пересекаются по прямой BT , плоскости TBE и TDC пересекаются по прямой TC ; в) да.
62. а) Точка F ; б) по прямой FT ; в) да. 66. а) Точка O ; б) в точке K ; в) да. 68. а) Прямая PX ; б) в точке P ; в) да. 93. $(\sqrt{5} + 1)S$.
94. $2a^2 \left(1 + \frac{\sqrt{2\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$. 95. $(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) \text{ см}$. 96. $8\sqrt{3} \text{ см}^2$.

§ 3

98. Верно, если эти точки не лежат на одной прямой.
102. ACD, AKD, AFD, ABD . 107. $\sqrt{3} \text{ см}$. 110. Не всегда.
111. $5\sqrt{2} \text{ см}$.

§ 4

125. б) $\frac{\sqrt{3}}{8} \text{ см}^2$. 126. 12 см^2 . 129. б) $(6 + \sqrt{3}) \text{ см}$.
130. $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$. 133. $\frac{3\sqrt{41}}{5} \text{ см}$. 134. $\frac{a\sqrt{8R^2 - a^2}}{2}$. 135. б) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{10} - 1)P}{9}$.
136. $\sqrt{3} \text{ см}$. 137. 1 см . 138. $2\sqrt{2}Q$. 141. $\frac{1}{2}R^2\sqrt{3}$. 142. $3a^2$.
145. $2\sqrt{3} \text{ см}^2$. 146. $\frac{\sqrt{2(4S^2 + a^4)}}{4a}$. 147. $\frac{a^2\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. 150. $(\sqrt{5} + \frac{3}{2}\sqrt{2}) \text{ см}$.
151. 24 см^2 . 158. $8\sqrt{21} \text{ см}^2$. 149. $2\sqrt{6}S$. 160. $\frac{\sqrt{7}(6 - \sqrt{3})S}{66}$.
161. $\frac{5a^2\sqrt{3}}{4}$. 162. $4a\sqrt{\sqrt{a^4 + 4S^2} - a^2}$. 163. $2\sqrt{3}S$. 164. 288 см^2 .
165. $\frac{1}{4}a\sqrt{b^2 + a^2}$.

Глава 2

§ 1

176. б) $\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)$ см. 180. 13 см. 181. 36 см. 182. $\frac{8}{3}$ см.
 183. 20 см. 184. 3 см. 185. 8 см. 187. 9, 8 см. 188. 1, 8 см.
 189. $\frac{32\sqrt{3}}{9}$ см. 190. $\frac{9\sqrt{3}a^2}{8}$. 194. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. 195. 16 см². 196. $\frac{\sqrt{S}}{4}$.
 197. $\frac{\sqrt[4]{15S^2}}{4}$. 198. $\frac{16\sqrt{11}S}{33}$.

§ 2

209. б) 2,5 см. 214. 6 см. 215. 24 см². 218. 180 см².
 219. $OD = 6$ см, $KT = 9$ см. 220. $\frac{a^2\sqrt{5}}{8}$. 221. $a\left(\sqrt{2} + \frac{3}{2}\right)$. 222. 5 см.
 223. 16 см. 228. $\frac{8}{3}$ см. 230. 3 см. 232. 1 см². 233. $2a$. 234. 6 см.
 235. 4 см. 236. 2 см.

§ 3

242. б) Нет; в) нет. 244. а) Прямые OX и ME скрещивающиеся; б) нет; в) да. 248. а) Нет; б) нет; в) прямые OA_1 и CC_1 не являются скрещивающимися, прямые CC_1 и TD скрещивающиеся. 253. а) Прямые OC и DT скрещивающиеся.

§ 4

269. а) Верно; б) 30°; в) нет. 270. а) 90°; б) верно.
 271. а) 60°; б) нет; в) 30°. 272. а) Верно; б) 60°; в) 60°.
 273. а) Верно; б) 90°; в) $\frac{1}{5}$. 274. $\arccos \frac{4}{5}$. 275. а) 60°;
 б) $\arccos \frac{1}{\sqrt{6}}$. 276. $\arccos \frac{3\sqrt{5}}{10}$. 277. а) 60°; б) 60°. 278. 90°.
 279. б) $\arctg 2$; в) $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

§ 5

292. б) 4 см². 295. $2(\sqrt{3} + 1)$ см. 296. а) Верно.
 301. $(2 + \sqrt{17})$ см. 305. $\frac{9}{4}\sqrt{427}$ см². 308. 14 см. 309. $\frac{S}{16}$.
 310. 16 см². 311. 72 см. 312. 19 см. 313. $\frac{4}{3}S$. 314. $\frac{5}{4}Q$.
 315. $\frac{1}{9}S$, $\frac{4}{9}S$. 316. $\frac{4}{25}Q$. 317. 1:2, считая от вершины
 пирамиды. 318. $\frac{9a\sqrt{4b^2 - a^2}}{64}$. 319. 8 см².

Глава 3

§ 1

335. 5 см. 336. б) 20 см. 337. 10 см или $8\sqrt{10}$ см.
 338. $\sqrt{29}$ см. 345. $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$. 347. $4\sqrt{2}$ см². 349. 5 см. 350. $\frac{13}{4}$ см.
 351. 90°. 352. 12 см. 353. 12 см. 355. $16\sqrt{2}$ см². 357. $4(2 + \sqrt{5})$ см².
 358. 14 см. 359. в) 4 см. 360. 5 см. 362. 4 см. 363. 12 см.
 364. 12 см, 20 см. 365. $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. 366. $\frac{2}{9}ab$.

§ 2

371. $\sqrt{33}$ см. 372. $a \sin \varphi$. 374. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. 377. 30 см².
 378. 4 см. 379. б) $9\sqrt{2}$ см². 380. 5 см. 381. $2\sqrt{3}$ см².
 382. $\frac{\sqrt{4S^2 - a^2b^2}}{a}$. 383. $48\sqrt{10}$ см². 384. 4 см. 385. 2 см, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см.
 386. $d(O, DB) = 8\sqrt{5}$ см, $d(O, BC) = 8\sqrt{5}$ см, $d(O, DC) = 12\sqrt{2}$ см.
 387. $4(2 + \sqrt{6})$ см². 388. $\frac{a\sqrt{b^2 + a^2 \sin^2 \alpha}}{2 \cos \alpha}$. 389. $\frac{a\sqrt{55}}{5}$.
 390. $OA = \frac{\sqrt{16S^2 - 3a^4}}{2a}$, $\frac{a}{8S}\sqrt{48S^2 - 9a^4}$. 391. 4 см, 6 см. 392. 20 см.
 393. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ см. 394. 16 см, 40 см. 395. $\frac{\sqrt{51}}{2}$ см². 396. 17 см.
 397. 2,5 см. 398. $\sqrt{34}$ см.

§ 3

399. а) Да; б) DC . 400. а) C_1O ; б) нет. 401. а) Нет; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
 402. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. 403. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ см. 404. $\sqrt{2} \sin \varphi$. 405. 45°. 406. $\frac{\sqrt{6}}{4}$.
 407. $3a$. 408. $\frac{a^2}{2}(1 + \sqrt{3} + \sqrt{7})$. 409. $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ см. 410. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см.
 411. 45°, 45°. 412. 2 см, $\sqrt{6}$ см. 413. 30°. 414. 60°.

§ 4

415. а) Нет; в) 45°. 416. а) Нет. 417. а) Нет. 418. 45°. 420. 30°.
 421. $12\sqrt{3}$ см². 422. 16 см². 423. 2,4 см. 424. а) Нет. 426. 2 см.
 427. $\sqrt{6}$ см. 428. $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ см. 429. 80 см². 430. 60°, 1 см².
 434. $\sqrt{2}$ см². 436. $\frac{a^2\sqrt{5}}{8}$. 437. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 439. 60°. 440. 90°. 441. $\frac{1}{3}$.
 442. $\frac{1}{6}$. 444. 60°. 445. 6 см. 446. 60°. 447. 120°. 448. 2 см.

(Название и номер учреждения образования)

Учебный год	Имя и фамилия учащегося	Состояние учебного пособия при получении	Оценка учащемуся за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Учебное издание

Шлыков Владимир Владимирович

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 10 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

3-е издание, пересмотренное и исправленное

Зав. редакцией *В. Г. Бехтина*. Редактор *Л. Н. Ясницкая*. Художник обложки *Е. В. Шлыков*. Художественные редакторы *Л. А. Дашкевич, А.-М. Железко*. Техническое редактирование и компьютерная верстка *И. И. Дубровской*. Корректоры *О. С. Козицкая, Е. И. Даниленко, Д. Р. Лосик, В. С. Бабеня, А. В. Алешко*.

Подписано в печать 03.06.2013. Формат $60 \times 90^{1/16}$. Бумага офсетная. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 10 + 0,25 форз. Уч.-изд. л. 7,79 + 0,21 форз. Тираж 105 000 экз. Заказ .

Издательское республиканское унитарное предприятие «Народная асвета»
Министерства информации Республики Беларусь.
ЛИ № 02330/0494083 от 03.02.2009. Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.

ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
ЛП № 02330/0150496 от 11.03.2009. Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск.